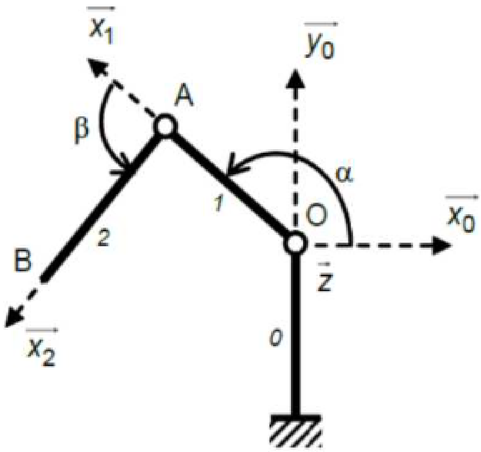
Compétences visées:

B2-02 Compléter un modèle multiphysique.

Support d'application - Robot Ericc 3



On s'intéresse uniquement aux deux axes (épaule et coude) d'un robot Ericc 3. Afin de simplifier notre étude et de faire apparaître clairement les informations qui nous intéressent (distance entre les points,mouvements relatifs entre les bases ...), nous travaillons à partir d'une représentation simplifiée du robot : on parle d'un schéma cinématique du système.

Soit $R_0 = (O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z})$ un repère lié au bâti **0**.

Soient $R_1 = (O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z})$ et $R_2 = (A, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z})$ deux repères liés respectivement au bras **1** et **2**.

Les deux bras **1** et **2** du robot se déplacent dans le plan $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0})$.

Le bras **1** a un mouvement de rotation d'axe $(O, \overrightarrow{z})$ par rapport au bâti **0**.

On pose $\alpha = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1})$.

Le bras **2** a un mouvement de rotation d'axe $(A, \overrightarrow{z})$ par rapport au bras **1**.

On pose $\overrightarrow{OA} = a\overrightarrow{x_1}$ et $\beta = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$.

L'extrémité B du bras **2** est telle que $\overrightarrow{AB} = b\overrightarrow{x_2}$. a et b sont des constantes

Objectif

Réaliser des opérations mathématiques sur les vecteurs définissant le Robot Ericc, pour dans un futur TD pouvoir définir l'évolution cinématique de ce dernier.

Table des matières

1 Orienter l'espace

En mécanique, il est fondamental d'orienter l'espace géométrique afin de définir la manière donc les objets évoluent dans celui-ci.

1.1 Direction

D'un point de vue mathématique, le mot direction est associé à un ensemble de droites affines parallèles, lesquelles ne sont pas orientées.

En mécanique, nous ajoutons un sens à cette direction. Tel le voyageur se présentant à un carrefour, il a besoin de savoir si la direction à suivre est vers la droite ou vers la gauche. Sa destination finale en dépend. C'est pourquoi le mécanicien oriente une direction.

Définition

En mécanique, une direction est définie par un vecteur, que l'on peut tracer avec une flèche, cette dernière rajoute la notion de sens.

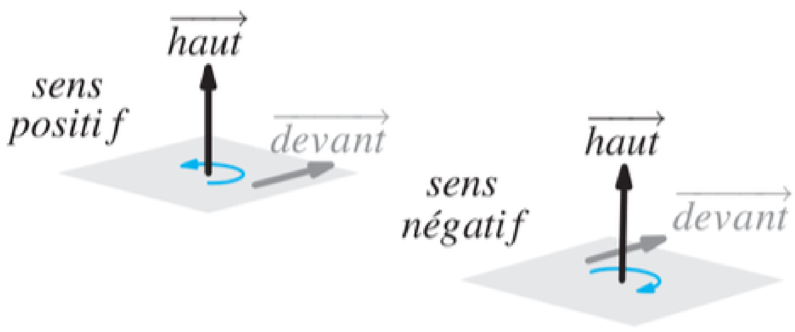
1.2 Sens trigonométrique

Définition

Un axe de rotation correspond à une droite de l'espace affine autour de laquelle il est possible de « tourner ».

Soit alors un axe quelconque, que l'on oriente par une flèche. L'observateur se positionne parallèlement à cette droite, la tête du côté de la flèche que l'on appelle sur la figure ci-dessous $\overrightarrow{haut}$. Son regard définit la direction notée $\overrightarrow{devant}$ dans laquelle il va avancer en tournant autour de cet axe. Il peut alors réaliser que seuls deux choix sont possibles :

- ou bien il tourne en conservant l'axe sur sa gauche ;
- ou bien il tourne en conservant l'axe sur sa droite.



Définition *Le sens trigonométrique*

Le sens trigonométrique, ou sens direct, ou sens positif correspond au sens de rotation qui laisse l'axe de rotation concerné sur la gauche lorsque l'on tourne autour.

1.3 Base vectorielle directe

Le choix d'une direction et du sens trigonométrique permet de construire une base orthonormée directe, très souvent notée $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ en mécanique

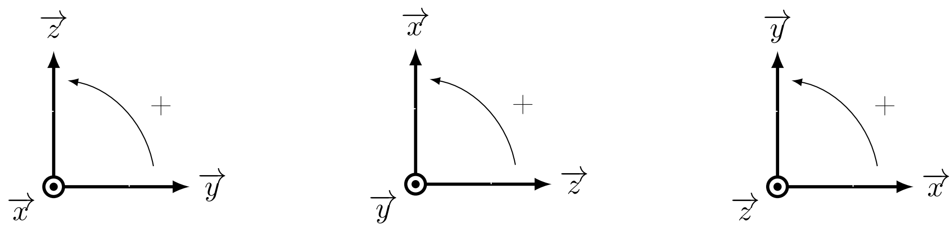
Remarque

La notation $(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j}, \overrightarrow{e_k})$ était utilisée par le passé. Néanmoins, celle-ci ne l'est plus car elle nécessite plus de caractères et met en indice les informations importantes.

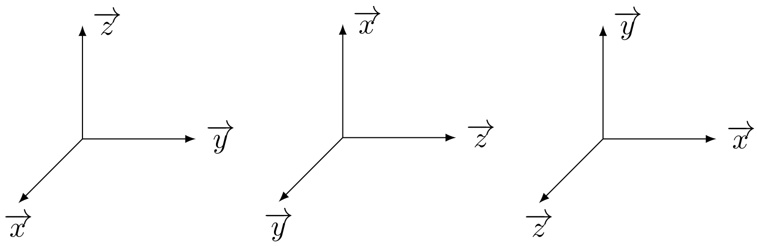
Pour une base vectorielle orthonormée directe $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ le sens positif se définit très simplement par permutation circulaire :

- autour de $\overrightarrow{x}$, le sens positif est défini en allant de $\overrightarrow{y}$ vers $\overrightarrow{z}$;
- autour de $\overrightarrow{y}$, le sens positif est défini en allant de $\overrightarrow{z}$ vers $\overrightarrow{x}$;
- autour de $\overrightarrow{z}$, le sens positif est défini en allant de $\overrightarrow{x}$ vers $\overrightarrow{y}$.

En deux dimensions :



En trois dimensions :



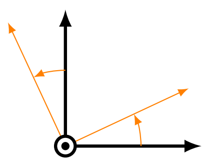
2 Définition d'un angle

Définition

Un angle est défini entre deux vecteurs. C'est donc une construction plane, dans le plan vectoriel défini par ces deux vecteurs.

La seule activité à savoir mener est ainsi de définir un angle entre deux bases vectorielles ayant un vecteur commun. Ce vecteur commun est bien évidemment le vecteur orthogonal au plan contenant l'angle à définir.

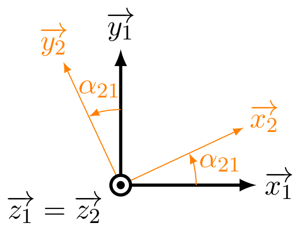
La définition d'un angle débute donc toujours par le dessin de l'empreinte suivante :



Le vecteur commun aux deux bases vectorielles sort de la feuille, **et il doit en être toujours ainsi.**

L'angle est toujours défini petit et positif, de manière à permettre des calculs trigonométriques rapides et sans erreur de signe.

L'empreinte étant posée, il faut décider quel angle on définit :
- l'angle α_{21} qui définit la position de la base 2 par rapport à la base 1 ;
- l'angle α_{12} qui définit la position de la base 1 par rapport à la base 2 .



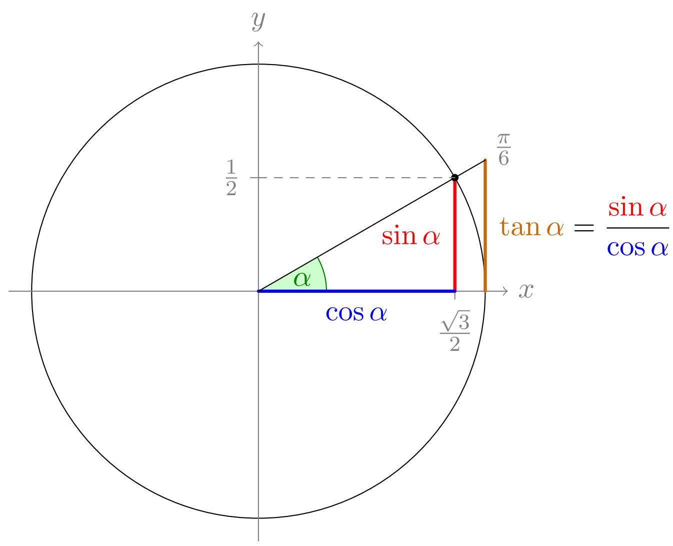
Exemple : *Robot Ericc 3*

Q1 Réaliser les figures planes illustrant les paramètres d'orientation α et β

3 Trigonométrie

3.1 Cercle trigonométrique

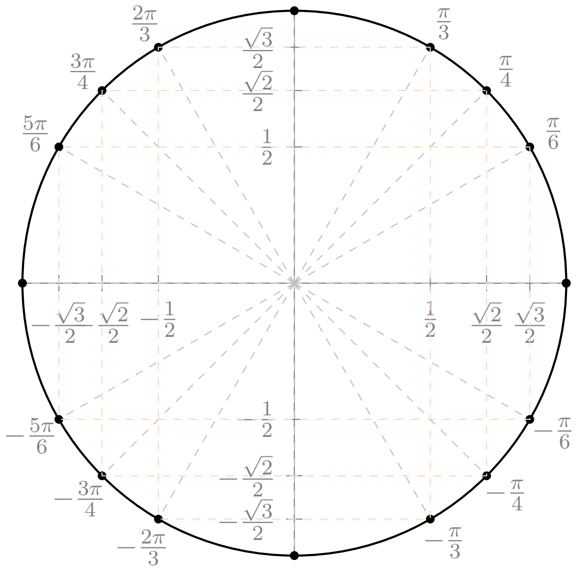
Le cercle trigonométrique permet de visualiser les relations entre les angles, c'est un bon outils de mémorisation.



3.2 Angles principaux

Les principales relations entre les angles et leurs sinus / cosinus ci-dessous sont à connaitre par cœur.

Angle	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

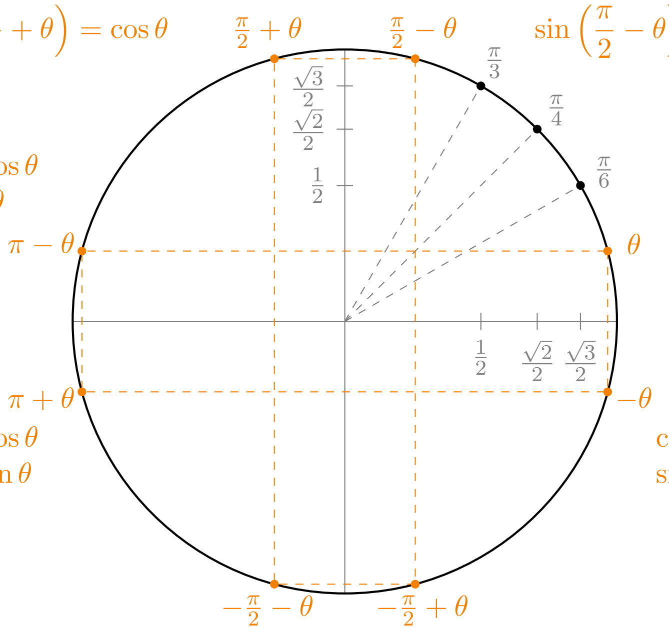


3.3 Relations sur les angles

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta \qquad \sin(\pi-\theta) = \sin\theta$$



$$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta \qquad \sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

3.4 Relations entre cos, sin et tan

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \qquad 1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

3.5 Formules d'addition

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \qquad \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

3.6 Formules de linéarisation

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \qquad \sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2} \qquad \tan^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{1+\cos(2\theta)}$$

4 Différents repères

L'espace géométrique est un espace de points. Le repère d'espace de référence est un repère orthonormé direct construit à partir d'un point particulier et d'une base vectorielle orthonormée directe.

Les axes du repère sont les droites issues du point origine et sont orientés par les vecteurs de la base.

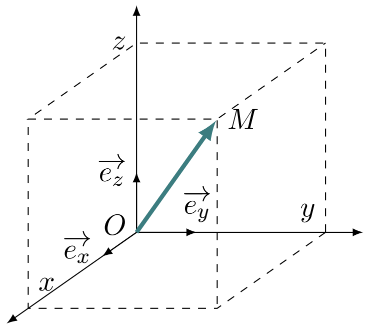
Soient O un point pris comme origine et M le point courant que l'on veut repérer

4.1 Repère cartésien

Le point M est repéré par trois longueurs algébriques :

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{e_x} + y \cdot \overrightarrow{e_y} + z \cdot \overrightarrow{e_z}$$

Un petit volume élémentaire autour du point M est défini par un parallélépipède de côtés dx, dy et dz. Le mécanicien, dans un souci de rapidité, nomme $\overrightarrow{x}$ à la fois la direction et le vecteur unitaire de l'axe $(O, \overrightarrow{x})$ et x l'abscisse du point sur cet axe.

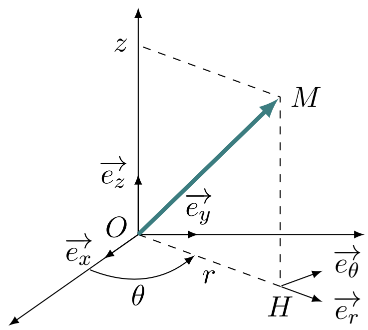


4.2 Repère cylindrique

Le point M est repéré par un angle et deux longueurs algébriques :

$$\overrightarrow{OM} = r \cdot \overrightarrow{e_r} + z \cdot \overrightarrow{e_z}$$

Un petit volume élémentaire autour du point M est défini par un parallélépipède de côtés dr, $r \cdot d\theta$ et dz. Son volume est ainsi $dV = r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz$

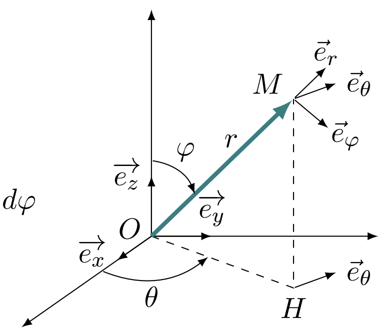


4.3 Repère sphériques

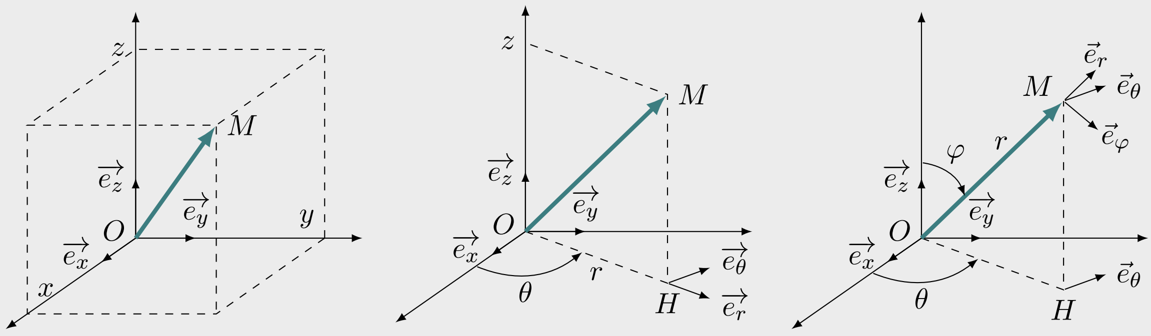
Le point M est repéré par deux angles et une longueurs algébriques :

$$\overrightarrow{OM} = r \cdot \overrightarrow{e_r}$$

Le petit volume autour du point M est défini par un parallélépipède de cotés dr, $rd\varphi$ et $r\sin\varphi d\theta$. son volume est alors : $dV = r^2 \cdot \sin\varphi \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi$



À retenir



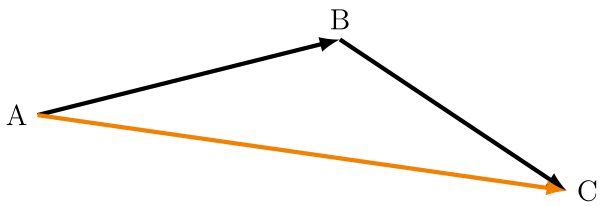
Coordonnées cartésiennes	Coordonnées cylindriques	Coordonnées sphériques
$M(x, y, z)$	$M(r, \theta, z)$	$M(r, \varphi, \theta)$
$\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{e_x} + y.\overrightarrow{e_y} + z.\overrightarrow{e_z}$	$\overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{e_r} + z.\overrightarrow{e_z}$	$\overrightarrow{OM} = r.\vec{e}_r$

5 Opération sur les vecteurs

Définition *Vecteur*

Un vecteur est un élément d'un espace vectoriel.

Nous nous intéresserons plus particulièrement aux vecteurs de l'espace vectoriel euclidien de dimension 3. Ces vecteurs-là ont la particularité de se laisser représenter par des flèches, ce qui est commode pour dessiner des vitesses ou des forces. Une des propriétés remarquables de ces vecteurs « flèches » est qu'il est possible de les sommer en les dessinant bout à bout.



5.1 Produit scalaire

5.1.1 Définition

Définition *Produit scalaire*

Le produit scalaire est une application qui à un couple de vecteurs associe un nombre réel égal au produit des normes et du cosinus de l'angle orienté du premier vecteur vers le deuxième vecteur.

$$E \times E \to \mathbb{R}$$
$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \to \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

Exemple : *Robot Ericc 3*

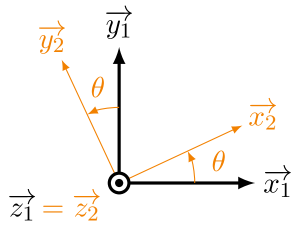
Q2 Déterminer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{x_2}\cdot\overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{y_2}\cdot\overrightarrow{x_2}$, $\overrightarrow{z_1}\cdot\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{z_2}\cdot\overrightarrow{z_1}$, $\overrightarrow{x_0}\cdot\overrightarrow{z_1}$, $\overrightarrow{x_1}\cdot\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{x_0}\cdot\overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{y_2}\cdot\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{y_1}\cdot\overrightarrow{y_2}$

5.1.2 Propriétés

- Commutativité : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$;
- Distributivité : $\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$;
- Linéarité : $\lambda.\overrightarrow{u}\cdot\mu.\overrightarrow{v}=\lambda\mu\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\right)$;
- Si $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$ alors $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$;
- Si $\overrightarrow{u}\parallel\overrightarrow{v}$ alors on a $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\varepsilon\left\|\overrightarrow{u}\right\|\times\left\|\overrightarrow{v}\right\|$ avec $\varepsilon=\pm1$ suivant l'orientation de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

5.1.3 Application aux changements de bases

Pour faciliter le calcul des projections, on utilise des figures géométrales appelées aussi figures de projection ou figures de calcul ou figures de changement de bases.



Attention

Ces figures seront toujours réalisées avec des angles positifs proche de 20°, le vecteur commun aux deux bases étant perpendiculaire à la feuille toujours dirigé vers le lecteur de la figure.

Vous devez être capables de retrouver les projections des différents vecteurs **sans hésitation** :

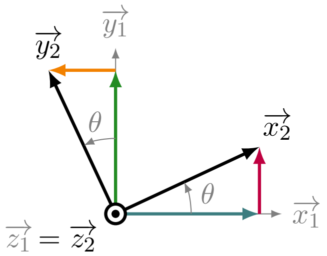
$$\overrightarrow{x_2}=\cos\theta.\overrightarrow{x_1}+\sin\theta.\overrightarrow{y_1} \qquad \overrightarrow{y_2}=\cos\theta.\overrightarrow{y_1}-\sin\theta.\overrightarrow{x_1}$$

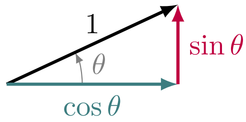
$$\overrightarrow{x_1}=\cos\theta.\overrightarrow{x_2}-\sin\theta.\overrightarrow{y_2} \qquad \overrightarrow{y_1}=\cos\theta.\overrightarrow{y_2}+\sin\theta.\overrightarrow{x_2}$$

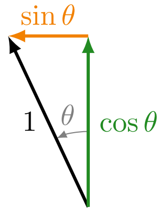
Pour éviter toute erreur, il est utile de vérifier ses formules de projection en $\theta=0$ et $\theta=90°$.

5.1.4 Astuce de calcul avec les figures planes

Quand on cherche à projeter un vecteur dans une autre base avec une figure plane, si on a bien dessiné la figure **avec un angle de 20° environ**, on voit apparaitre un triangle rectangle de la forme ci-dessous, avec un « petit côté » et un « grand côté ». Comme on raisonne sur des vecteurs unitaires, l'hypoténuse est de longueur égale à 1.







$\overrightarrow{x_2} = \cos\theta.\overrightarrow{x_1} + \sin\theta.\overrightarrow{y_1}$ $\qquad$ $\overrightarrow{y_2} = -\sin\theta.\overrightarrow{x_1} + \cos\theta.\overrightarrow{y_1}$

Il suffit alors de retenir que « **petit côté** » = **sinus** et « **grand côté** » = **cosinus**, et de raisonner sur la direction des vecteurs pour déduire le signe.

5.2 Produit vectoriel

5.2.1 Définition

Définition *Produit vectoriel*

Le produit vectoriel est une application qui à un couple de vecteurs associe un vecteur porté par le vecteur unitaire directement orthogonal à ces deux vecteurs et de module égal au produit des normes et du sinus de l'angle orienté du premier vecteur vers le deuxième vecteur.

$$E \times E \to E$$
$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \to \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\| \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$$

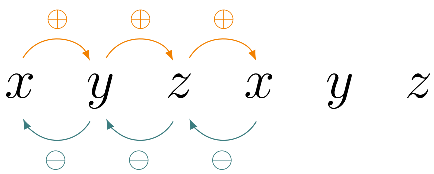
où $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ forme un trièdre direct.

Exemple : *Robot Ericc 3*

Q3 Déterminer les produits vectoriels suivants : $\overrightarrow{x_2}\wedge\overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{y_2}\wedge\overrightarrow{x_2}$, $\overrightarrow{z_1}\wedge\overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{z_2}\wedge\overrightarrow{z_1}$, $\overrightarrow{x_0}\wedge\overrightarrow{z_1}$, $\overrightarrow{x_1}\wedge\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{x_0}\wedge\overrightarrow{y_2}$, $\overrightarrow{y_2}\wedge\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{y_1}\wedge\overrightarrow{y_2}$

5.2.2 Astuces de calcul

Astuce 1 Lorsque les 2 termes du produit vectoriel sont 2 vecteurs d'une base orthonormée directe (exemple : $\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}$), on peut facilement calculer le produit vectoriel en utilisant le moyen mnémotechnique suivant :



Astuce 2 Si les vecteurs ne sont pas dans la même base orthonormée mais peuvent se représenter sur la même figure plane on peux calculer directement le produit vectoriel. Pour cela il faut déterminer premièrement le vecteur normal, le sens de rotation et l'angle.

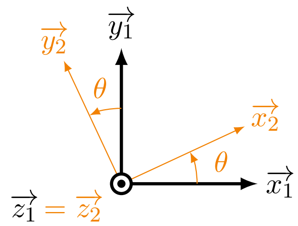
Exemple :

Pour calculer $\overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{y_2}$, on tourne autour de $\overrightarrow{z_1}$ dans le sens positif et l'angle entre les deux est θ donc

$$\overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{y_2} = +\sin\theta \overrightarrow{z_1}$$

Pour calculer $\overrightarrow{y_2} \wedge \overrightarrow{x_1}$, on tourne autour de dans le sens et l'angle entre les deux est donc

$$\overrightarrow{y_2} \wedge \overrightarrow{x_1} =$$



5.3 Produit mixte

Définition *Produit mixte*

Le produit mixte est la quantité notée $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ et définie par :

$$\begin{aligned} &E \times E \times E \to \mathbb{R} \\ &(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \to (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} \end{aligned}$$

La propriété importante du produit mixte est son invariance par permutation circulaire sur les vecteurs.

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \Longleftrightarrow (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) \cdot \overrightarrow{u} = (\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v}$$

5.4 Double produit vectoriel

Définition *Double produit vectoriel*

Le double produit vectoriel est définit par la relation :

$$\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$$

Le double produit vectoriel a une utilité pour résoudre des équations vectorielles de type $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{c}$