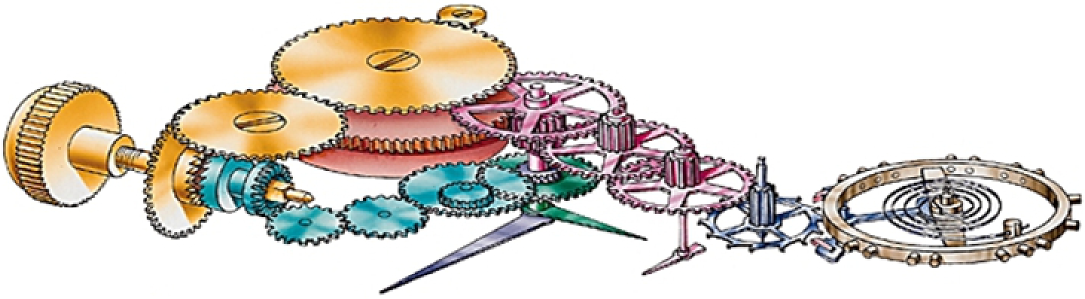
Cinématique du solide indéformable

Cours

Lycée Jean Zay – 21 rue Jean Zay – 63300 Thiers – Académie de Clermont-Ferrand



Compétences visées:

B2-13	Proposer un modèle cinématique paramétré à partir d'un système réel, d'une maquette numérique ou d'un plan d'ensemble.
B2-14	Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.
C2-05	Caractériser le mouvement d'un repère par rapport à un autre repère.
C2-06	Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques.

Préambule

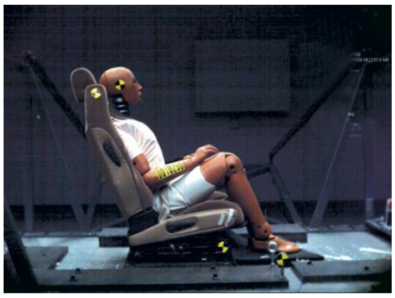
La cinématique permet de décrire et caractériser les mouvements des solides, indépendamment des causes qui les produisent.

Table des matières

Support d'application - Mannequin de crash-test automobile :

Objectif

- Etudier les mouvements du mannequin pour vérifier les impacts sur le corps humain en cas d'accident.
- S'assurer que la tête du mannequin ne subit pas une accélération supérieure à l'accélération maximale acceptable par le corps humain.



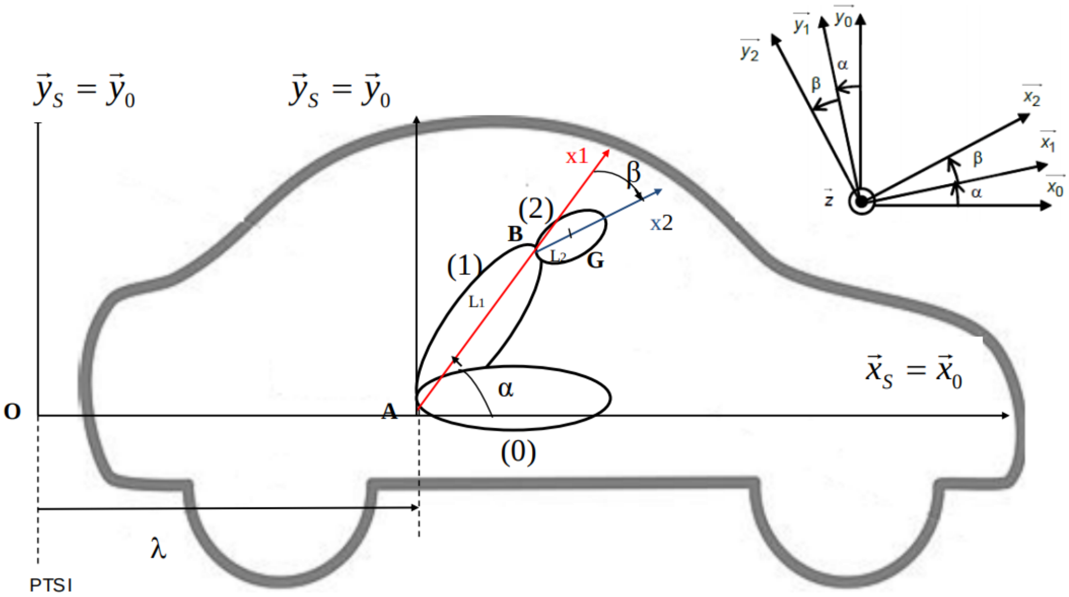
On considère le mouvement d'un passager dans un véhicule 0 (auquel est associé un repère $R_0(A;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$).

Le véhicule 0 est en mouvement de translation rectiligne dans un repère $R_S(O;\overrightarrow{x_S},\overrightarrow{y_S},\overrightarrow{z_S})$ lié au sol S.

On définit le paramètre λ de position du véhicule 0 tel que $\overrightarrow{OA} = \lambda \cdot \overrightarrow{x_S}$.

Le passager est représenté par un système de 2 solides :

- le tronc 1 (auquel est associé un repère $R_1(A;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})$) , en liaison pivot d'axe $(A;\overrightarrow{z})$ avec le véhicule 0
- la tête 2 (auquel est associé un repère $R_2(B;\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})$) en liaison pivot d'axe $(B;\overrightarrow{z})$ avec le tronc 1



1 Notion de mouvement et de référentiel

1.1 Référence spatiale

Exemple : *Application au mannequin de crash-test*

Soit le mannequin assis dans la voiture.
Nous remarquons que, à vitesse constante (avant le choc) :

- le mannequin est au repos PAR RAPPORT à la voiture,
- le mannequin est en mouvement PAR RAPPORT à la terre.

Un mouvement est un déplacement relatif d'un solide par rapport à un autre, il met en jeu trois entités :

- Le solide observé ;
- Le solide de référence ;
- Le temps.

Le mouvement d'un solide S par rapport à un solide 0 est noté $S/0$.

Au solide de référence est associé un repère orthonormé direct. Il est tel que tous les points constituant le solide soient sans mouvement par rapport à ce repère.

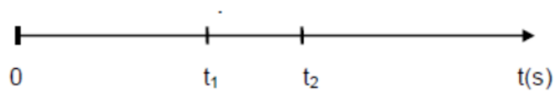
Dans la suite, on parlera indifféremment d'un solide ou du repère qui lui est attaché.

1.2 Notion de référence temporelle

Choisir une référence spatiale ne suffit pas. En effet, un solide est en mouvement par rapport à un repère spatial, si sa position évolue par rapport au temps.

Par conséquent nous pouvons dire qu'un solide est en mouvement, si auparavant nous avons défini une référence temporelle.

Une référence temporelle sera définie par un repère temporel orienté dans le sens de la succession des évènements dans le temps.



Chaque point de ce repère est appelé instant. L'abscisse de l'instant est appelé date (t). Son unité est la seconde (s).

1.3 Référentiel = repère spatial + repère temporel

Le repère de référence, couplé à une échelle de temps, constitue le référentiel du mouvement.

2 Cinématique du point d'un solide

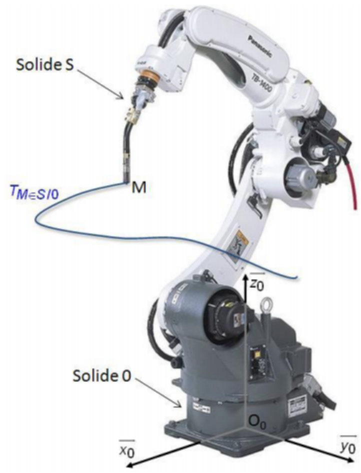
2.1 Trajectoire

La trajectoire d'un point appartenant à un solide, dans son mouvement par rapport à un autre solide, est le lieu des positions successives occupées par ce point au cours du temps dans le repère lié au solide de référence. Cette trajectoire peut-être :

- un segment de droite ;
- un arc de cercle ;
- une courbe quelconque.

Notation : la trajectoire d'un point appartenant à un solide S dans son mouvement par rapport à un solide 0 est notée $T_{M\in S/0}$

Exemple :
Robot soudeur



Dans le cas du robot soudeur (Panasonic), la trajectoire $T_{M\in S/0}$ correspond exactement au cordon de soudure réalisé par le robot.
Le point M est un point situé à l'extrémité de la buse de soudage (solide S).
Le repère de référence $R_0(O_0;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ est lié au socle du robot (solide 0).

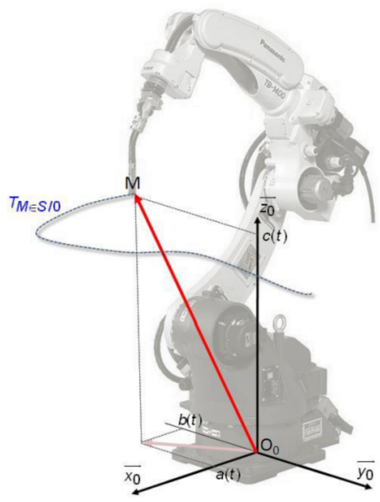
Exemple : *Application au mannequin de crash-test*

Déterminer les trajectoires suivantes : $T_{A\in 0/S}$, $T_{B\in 1/0}$ et $T_{G\in 2/1}$.

2.2 Vecteur position d'un point d'un solide

Le vecteur position d'un point M appartenant à un solide S est le vecteur qui lie ce point M à l'origine 0_0 du repère de référence $R_0(O_0; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$.

A la date t :



Que l'on peut encore écrire

Unité de la norme du vecteur position : m

Remarque

Selon le mouvement relatif étudié, il peut être judicieux d'exprimer le vecteur position à l'aide de coordonnées autres que les coordonnées cartésiennes (coordonnées cylindriques ou coordonnées sphériques notamment).

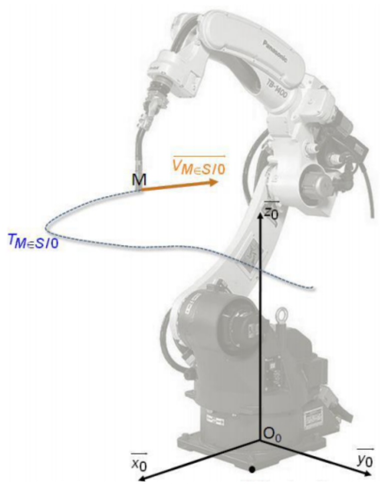
2.3 Vecteur vitesse du point d'un solide

Le vecteur vitesse du point M appartenant au solide (S) en mouvement dans un repère $R_0(O_0; \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ lié à 0, à la date t, est la dérivée par rapport au temps du vecteur position pour un observateur lié à R_0.

$$\overrightarrow{V_{M/0}} = \overrightarrow{V_{M\in S/0}} = \frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt}$$

R_0 est le repère de dérivation

Unité de la norme du vecteur vitesse : m.s^{-1}



Remarque

- Le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{M\in S/0}}$ a même direction que la tangente à la trajectoire du point M dans le repère R_0 lié à 0.
- Attention, si le point M n'appartient pas « physiquement » au solide S, les vecteurs vitesse $\overrightarrow{V_{M/0}}$ et $\overrightarrow{V_{M\in S/0}}$ sont différents.

2.4 Vecteur accélération du point d'un solide

Le vecteur accélération du point M appartenant au solide (S) en mouvement dans un repère $R_0(O_0;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ lié à 0, à la date t, est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse pour un observateur lié à R_0.

R_0 est le repère de dérivation

Unité de la norme du vecteur accélération : m.s^{-2}

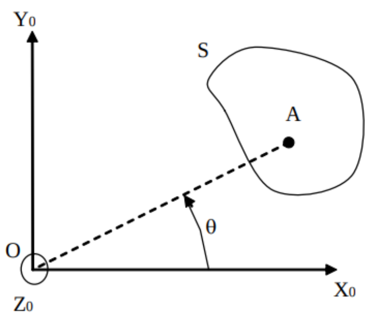
Remarque

Attention, si le point M n'appartient pas « physiquement » au solide S, les vecteurs accélération $\overrightarrow{\Gamma_{M/0}}$ et $\overrightarrow{\Gamma_{M\in S/0}}$ sont différents.

2.5 Vecteur rotation d'un solide

Le vecteur rotation (ou vitesse de rotation) d'un solide S par rapport à un repère $R_0(O_0;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$ lié à un solide 0 est noté $\overrightarrow{\Omega_{S/0}}$.

On a :

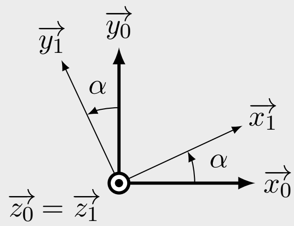


Le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega_{S/0}}$ caractérise :

- par sa direction, la direction de l'axe autour duquel S tourne dans R_0
- par sa norme, la vitesse angulaire avec laquelle se fait cette rotation (ici $\|\dot{\theta}\|$). Sa norme est exprimée en rad/s.
- par son sens, le sens dans lequel se fait cette rotation (si $\dot{\theta} > 0$, alors le solide tourne dans le sens trigonométrique autour de l'axe z_0 ; si $\dot{\theta} < 0$, alors il tourne dans le sens anti-trigonométrique).

Remarque

- La composition des vecteurs vitesse de rotation nous permet d'écrire les relations suivantes :
  - ◇ $\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$
  - ◇ $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = -\overrightarrow{\Omega_{0/1}}$
- La réalisation d'une figure plane similaire à celle ci-dessous nous permet de la traduire « immédiatement » par : $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{z_0} = \dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{z_1}$



Exemple : *Application au mannequin de crash-test*

Réaliser les différentes figures planes définissant les paramètres du système. Déterminer ensuite l'expression de $\overrightarrow{\Omega_{0/S}}$, $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$,$\overrightarrow{\Omega_{2/1}}$,$\overrightarrow{\Omega_{1/S}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{2/S}}$.

2.6 Formule de dérivation vectorielle

Lorsque l'on étudie le comportement cinématique des systèmes, on est souvent amené à déterminer la dérivée, par rapport au temps, d'un vecteur dans un repère de référence. Il s'agit en général d'un vecteur dont on connaît les coordonnés dans une base $B_2(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ en mouvement par rapport à la base $B_1(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ du repère de référence.

Pour ne pas s'engager dans des calculs longs et fastidieux, on n'exprimera jamais le vecteur dans la base du repère de référence pour ensuite dériver ses coordonnées.

On préférera utiliser la formule de la dérivation vectorielle suivante :

Définition *Formule de Bour*

Soit $\overrightarrow{U}$ un vecteur quelconque. Soient $R_1(0, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ un repère associé au solide 1 et $R_2(0, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ un repère associé au solide 2. Ces deux solides sont en mouvement l'un par rapport à l'autre.
La dérivée temporelle de $\overrightarrow{U}$ dans le repère R_2 s'écrit : (on l'appellera formule de dérivation vectorielle)

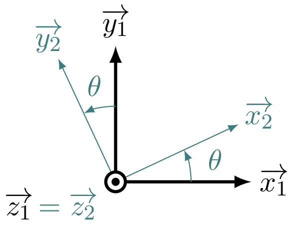
Quel l'on trouve également notée : $\left.\dfrac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right|_2 = \left.\dfrac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right|_1 + \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}}$

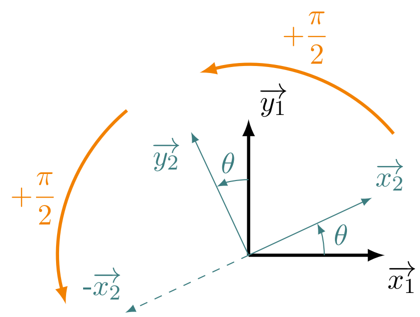
Astuce de calcul avec les figures planes :

Si on cherche à dériver un vecteur $\overrightarrow{U_i}$ dans un repère R_j, **et qu'il existe une même figure plane sur laquelle $\overrightarrow{U_i}$ et R_j apparaissent**, alors on peut :

- faire faire une rotation de $\frac{\pi}{2}$ au vecteur $\overrightarrow{U_i}$;
- multiplier ce vecteur par la dérivée temporelle de l'angle défini sur la figure plane.

Par exemple : $\left.\dfrac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right|_{R_1} = \dot{\theta}.\overrightarrow{y_2}$ et $\left.\dfrac{d\overrightarrow{y_2}}{dt}\right|_{R_1} = -\dot{\theta}.\overrightarrow{x_2}$



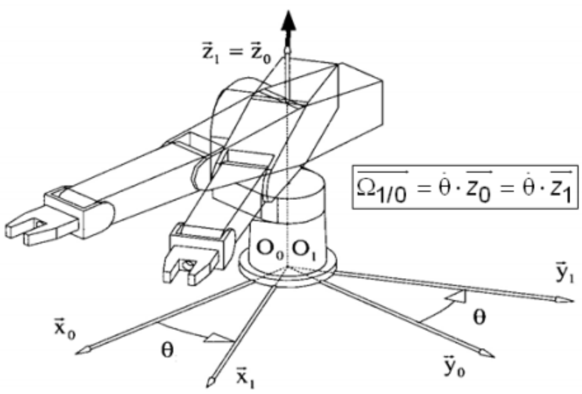


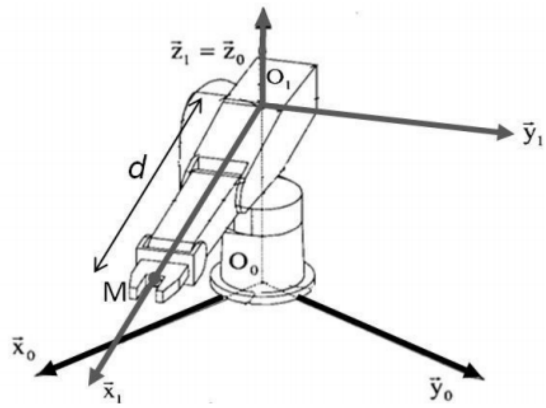
Attention

On ne peut utiliser cette méthode que s'il existe **une figure plane** sur laquelle apparaissent **le vecteur à dériver** et **le repère (ou base) dans lequel on souhaite dériver**. Dans le cas contraire, on n'échappera pas à des calculs de projection.

Exemple :

Cas d'un robot manipulateur :





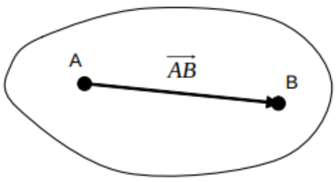
Alors :

Exemple : *Application au mannequin de crash-test*

Donner l'expression du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{G\in 2/S}}$, puis la méthode pour calculer $\overrightarrow{\Gamma_{G\in 2/S}}$ et vérifier ainsi le respect du cahier des charges d'accélération maximale supportable par le corps humain.

3 Champ des vecteurs vitesses des points d'un solide

3.1 Solide indéformable



Lors de l'utilisation d'un système, les solides qui le constituent se déforment sous l'action des efforts qu'ils subissent.

Dans la suite, on fera l'hypothèse que ces déformations sont suffisamment petites pour que l'on puisse les négliger et on considérera les solides comme étant indéformables. Cela implique que la distance entre deux points A et B d'un même solide ne varie pas au cours du temps :

$\forall$ A et B $\in (S)$, $\forall t$, $\|\overrightarrow{AB}\| = $ cste

3.2 Relation entre les vecteurs vitesses de 2 points d'un solide

Définition *Formule de Varignon*

En cinématique, le champ de vitesse entre deux points d'un solide est définit par :

Démonstration :

Soit un solide 1 en mouvement par rapport à un repère R_0 lié à un solide 0.

Soient A et B deux points de 0.

On exploite $\|\overrightarrow{AB}\| = $ cste en calculant $\left.\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_0$

On a $\left.\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_0 = \left.\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AB}$ avec :

- $\overrightarrow{AB}$ fixe dans 1 donc $\left.\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_1 = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Il peut exister une ambiguïté dans la notation lorsque l'on a plusieurs solides.

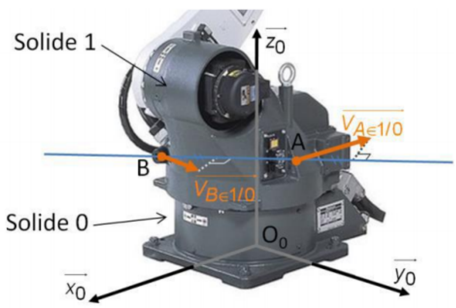
On préfère écrire :

Ou encore sous une autre forme :

3.3 Equiprojectivité du champ des vecteurs vitesses

On rappelle une des propriétés du champ de vitesse est l'équiprojectivité entre deux vecteurs vitesse dans le mouvement faisant intervenir les même solide :

Cette propriété sera très utilisée en cinématique graphique lors de l'étude des mouvements plans.



Démonstration :

Soient A et B deux points d'un solide indéformable 1 en mouvement par rapport à un repère R_0 lié à un solide 0.

On a alors $AB^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$

Dérivons cette expression (AB étant constant) :

$$0 = 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_0$$

Ainsi, si le point O est fixe dans R_0, on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right|_0 = \overrightarrow{AB}\left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right|_0$$

On en déduit :

$$\overrightarrow{V_{B\in 1/0}} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Cette relation traduit l'équiprojectivité du champ des vecteurs vitesses.

Démonstration :

Reprenons l'expression définie précédemment : $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{1/0}$.

Si on multiplie par $\overrightarrow{AB}$ chaque membre de l'égalité, on retrouve la relation d'équiprojectivité.

Remarque

Cette propriété sera très utilisée pour des applications de cinématique graphique.

3.4 Représentation par un torseur

Pour connaître les vecteurs vitesses de tous les points d'un solide 1 en mouvement par rapport à un repère R_0 lié à un solide 0, ce que l'on appelle le champ des vecteurs vitesses des points d'un solide, il suffit d'avoir :

- Le vecteur rotation du mouvement : $\overrightarrow{\Omega}_{1/0}$
- Le vecteur vitesse d'un point du solide (par exemple $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$).

Le champ des vecteurs vitesses est représenté par un torseur dans lequel on indique ces deux éléments

Terminologie associée à cette notation :

$\Omega_{1/0}$ et $V_{A\in 1/0}$ sont les éléments de réduction du torseur au point A.

- $\Omega_{1/0}$ Est la résultante du torseur, indépendante du point d'application du torseur ;
- $V_{A\in 1/0}$ est le moment du torseur au point A
- $\left\{\mathcal{V}_{1/0}\right\}$ est appelé torseur cinématique du mouvement de 1/0

Que l'on noté également :

Avec $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = p.\overrightarrow{x} + q.\overrightarrow{y} + r.\overrightarrow{z}$ et $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = u.\overrightarrow{x} + v.\overrightarrow{y} + w.\overrightarrow{z}$.

Remarque

La notation ci-dessus la plus communément utilisée est dite « en ligne". Elle permet notamment d'éviter de faire des projections quand un vecteur possède des composantes exprimées dans des bases différentes. Il existe une autre notation possible dite « en colonne » où on retrouve les 3 coordonnées du vecteur résultante et les 3 coordonnées du vecteur moment du torseur cinématique.
Attention, cette notation « en colonne » nécessite de rajouter obligatoirement la base dans laquelle les vecteurs sont exprimés.

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} p.\overrightarrow{x} + q.\overrightarrow{y} + r.\overrightarrow{z} \\ u.\overrightarrow{x} + v.\overrightarrow{y} + w.\overrightarrow{z} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{ccc} p & & u \\ q & \cdot & v \\ r & & w \end{array} \right\}_{A,(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}$$

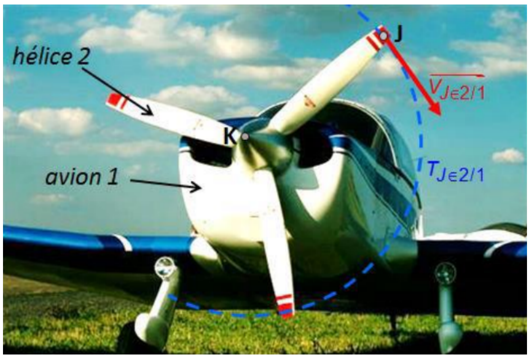
Remarque

Pour déplacer un torseur en un autre point, il suffit d'utiliser la relation de changement de point : $\overrightarrow{V_{B\in S/R}} = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{S/R}$.
Par exemple, pour déplacer le torseur cinématique de 1 par rapport à 0 du point A au point B, on pourra écrire :

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \overrightarrow{V_{B\in 1/0}} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \end{array} \right\}_B$$

On remarque bien que la résultante du torseur ($\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$) ne change pas avec le point d'application du torseur.

Exemple :
Cas d'une hélice d'avion :



$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{2/1} \\ \overrightarrow{V_{J\in 2/1}} \end{array} \right\}_J$$

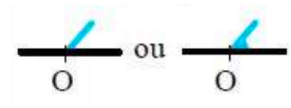
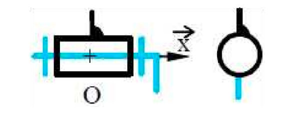
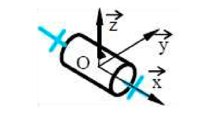
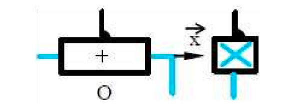
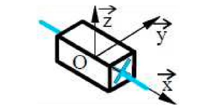
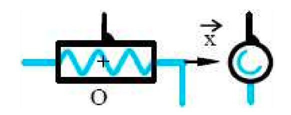
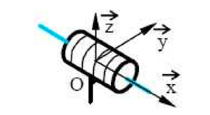
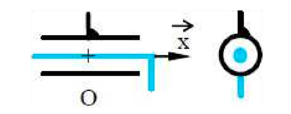
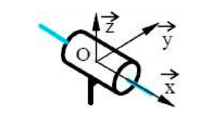
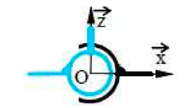
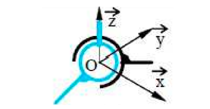
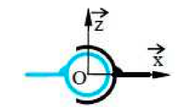
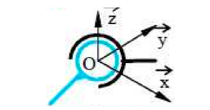
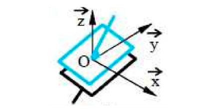
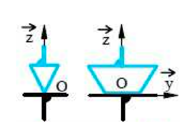
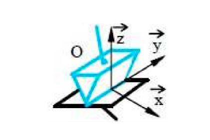
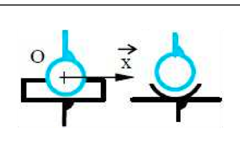
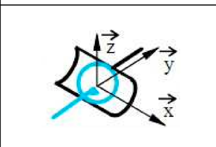
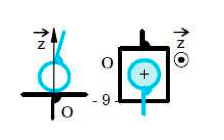
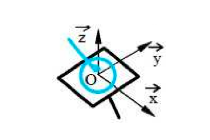
Quel que soit le point considéré, l'hélice tourne à la même vitesse $\|\overrightarrow{\Omega}_{2/1}\|$
Par contre chaque point a une vitesse différente que l'on peut déterminer si l'on connait la vitesse en un point (par exemple : $\overrightarrow{V_{K\in 2/1}} = \overrightarrow{0}$)

Exemple : *Application au mannequin de crash-test*

Écrire les torseurs cinématique du mouvement de 2 par rapport à 1 en B, de 1 par rapport à 0 en A et de 0 par rapport à S en A.

Déplacer le torseur cinématique de 2 par rapport à 1 au point G.

3.5 Torseurs cinématiques des liaisons normalisées

Nom de la liaison entre le solide **1** et le solide **2**	DDL	Schématisation dans le plan	Schématisation dans l'espace	Torseur cinématique
Encastrement	0			$\{\mathcal{V}_{2/1}\}=\{0\}$
Pivot d'axe $(O,\vec{x})$	1			$\{\mathcal{V}_{2/1}\}=\underset{\forall P\in(O,\vec{x})}{\begin{Bmatrix} p.\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}$
Glissière de direction $\vec{x}$	1			$\{\mathcal{V}_{2/1}\}=\underset{\forall P}{\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ u.\vec{x} \end{Bmatrix}}$
Hélicoïdale d'axe $(O,\vec{x})$	1			$\{\mathcal{V}_{2/1}\}=\underset{\forall P\in(O,\vec{x})}{\begin{Bmatrix} p.\vec{x} \\ u.\vec{x} \end{Bmatrix}}$ avec p et u liés par la relation $u=\frac{pas}{2\pi}p$
Pivot glissant d'axe $(O,\vec{x})$	2			$\{\mathcal{V}_{2/1}\}=\underset{\forall P\in(O,\vec{x})}{\begin{Bmatrix} p.\vec{x} \\ u.\vec{x} \end{Bmatrix}}$
Sphérique à doigt d'axes $(O,\vec{y})$ et $(O,\vec{z})$	2			$\{\mathcal{V}_{2/1}\}=\underset{O}{\begin{Bmatrix} q.\vec{y}+r.\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}$
Rotule (ou sphérique) de centre O	3			$\{\mathcal{V}_{2/1}\}=\underset{O}{\begin{Bmatrix} p.\vec{x}+q.\vec{y}+r.\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}$
Appui-plan de normale $\vec{z}$	3			$\{\mathcal{V}_{2/1}\}=\underset{\forall P}{\begin{Bmatrix} r.\vec{z} \\ u.\vec{x}+v.\vec{y} \end{Bmatrix}}$
Linéaire rectiligne (ou cylindre-plan) de normale $\vec{z}$ et d'axe $(O,\vec{y})$	4			$\{\mathcal{V}_{2/1}\}=\underset{\forall P\in(O,\vec{y},\vec{z})}{\begin{Bmatrix} q.\vec{y}+r.\vec{z} \\ u.\vec{x}+v.\vec{y} \end{Bmatrix}}$
Linéaire annulaire (ou sphère-cylindre) de centre O et d'axe $(O,\vec{x})$	4			$\{\mathcal{V}_{2/1}\}=\underset{O}{\begin{Bmatrix} p.\vec{x}+q.\vec{y}+r.\vec{z} \\ u.\vec{x} \end{Bmatrix}}$
Ponctuelle (ou sphère-plan) de contact O et de normale $\vec{z}$	5			$\{\mathcal{V}_{2/1}\}=\underset{\forall P\in(O,\vec{z})}{\begin{Bmatrix} p.\vec{x}+q.\vec{y}+r.\vec{z} \\ u.\vec{x}+v.\vec{y} \end{Bmatrix}}$

3.6 Mouvements particuliers

3.6.1 Mouvements de translation

Pour un mouvement de translation d'un solide 1 par rapport à un solide 0, par définition, tous les points P du solide 1 ont même vecteur vitesse $\vec{V}=\overrightarrow{V_{P\in 1/0}}$.

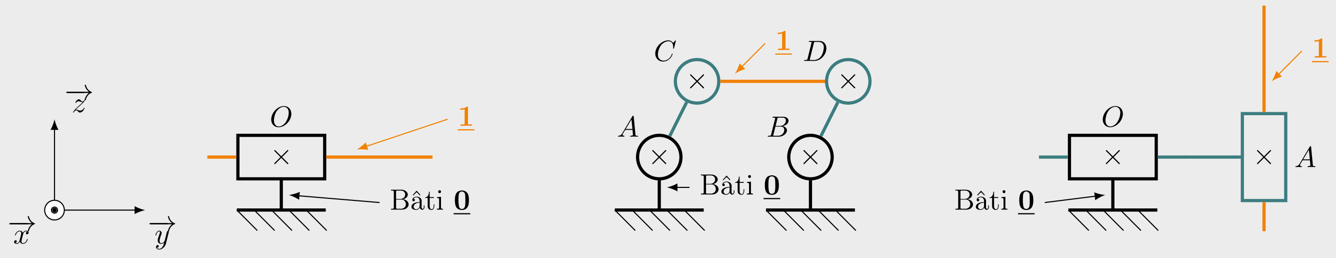
Donc $\vec{\Omega}_{1/0}=\vec{0}$

Le torseur cinématique s'écrit :

Les torseurs à résultante nulle sont appelés torseurs couples.

Remarque

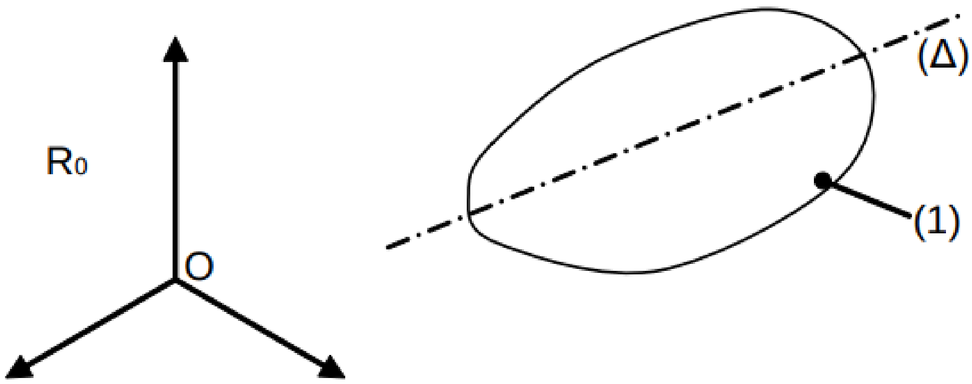
On peut rencontrer différents mouvements de translations (cf exemples ci-dessous) :
- translation rectiligne : les trajectoires des points du solide sont des droites
- translation circulaire : les trajectoires des points du solide sont des cercles
- translation « combinée »



1/0 : Translation rectiligne 1/0 : Translation circulaire 1/0 : Translation

3.6.2 Mouvements de rotation

Soit un solide 1 en mouvement de rotation dans un repère R_0 autour de l'axe Δ.



Le torseur cinématique de 1 par rapport à 0 s'écrit alors :

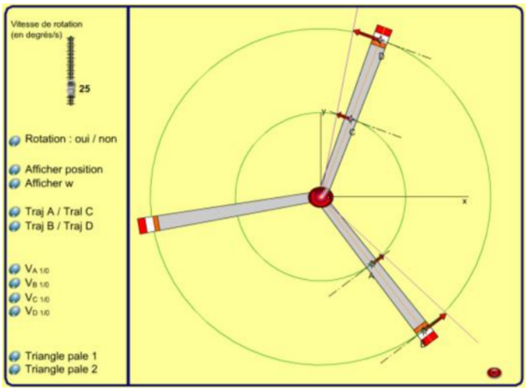
Remarque

- Pour tout point $P \in \Delta$, on a $\overrightarrow{V_{P\in 1/0}} = \vec{0}$
- $\vec{\Omega}_{1/0}$ est colinéaire à Δ, appelé axe de rotation (cet axe peut se déplacer au cours du temps par rapport à 0 ou 1)
- Tous les points du solide 1 ont, dans leur mouvement par rapport au solide 0, une trajectoire en forme d'arc de cercle
- Le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{M_i\in 1/0}}$ de tout point M_i du solide 1 n'appartenant pas à Δ est tangent à sa trajectoire en arc de cercle et a une norme V proportionnelle à la distance R qui sépare le point

M_i de l'axe de rotation $\Delta (V = R \cdot \Omega)$.

Les torseurs dont le moment est nul en un point sont appelés torseurs à résultante ou glisseurs.

Exemple :
Hélice d'avion



Le torseur cinématique de l'hélice 2 par rapport à l'avion 1 s'écrit : $\{V_{2/1}\} = {}_O\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{2/1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$ où $\overrightarrow{V_{0\in 2/1}} = \overrightarrow{0}$ car O est le centre de rotation.

3.6.3 Mouvements uniformes ou uniformément variés

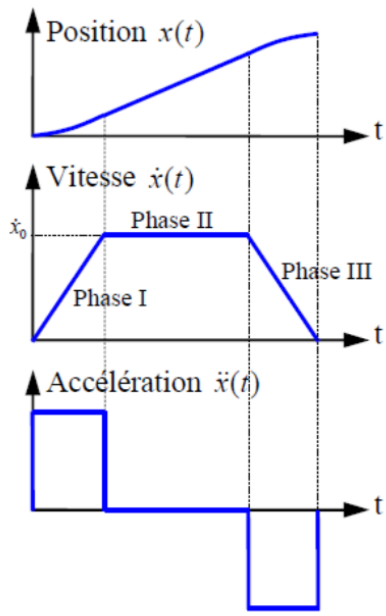
Un mouvement d'un solide est dit uniforme si sa vitesse (vitesse linéaire ou vitesse de rotation) reste constante au cours du temps.

Un mouvement d'un solide est dit uniformément varié si son accélération (accélération linéaire ou accélération angulaire) reste constante au cours du temps.

Exemple : *Application au mannequin de crash-test*

On modélise l'évolution de la vitesse de la voiture lors du crash test suivant la loi trapézoïdale ci-dessous.

Lors de la phase II, la voiture a un mouvement de translation uniforme (vitesse constante).
Lors des phases I et III, elle a un mouvement de translation respectivement uniformément accéléré et uniformément décéléré (accélération et décélération constantes).



Pour chaque phase du mouvement, on intégrera alors judicieusement les relations suivantes pour déterminer des relations entre les grandeurs caractérisant les lois de position, vitesse et accélération :

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} \qquad\qquad dx = v \cdot dt$$

$$a = \ddot{x} = \frac{dv}{dt} \qquad dv = a \cdot dt$$

Les allures des courbes de position et accélération peuvent être directement déduites de la courbe trapézoïdale de vitesse en interprétant les 2 relations ci-dessus sur les phases I, II et III.

Remarque

Il est souvent beaucoup plus rapide d'utiliser les aires sous les courbes $v(t)$ ou $a(t)$ égales respectivement à $\int v \cdot dt$ ou $\int a \cdot dt$ pour déterminer directement les relations voulues.

3.7 Champ des vecteurs accélérations des points d'un solide

Définition

Le champ de vecteur accélération entre deux points d'un solide est définit par :

$$\overrightarrow{\Gamma_{B\in 1/0}} = \overrightarrow{\Gamma_{A\in 1/0}} + \left.\frac{d\overrightarrow{\Omega_{1/0}}}{dt}\right|_0 \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AB}\right)$$

Démonstration :

Soient A et B deux points d'un solide 1 en mouvement par rapport à un repère R_0 lié à un solide 0.

Nous avons établi que : $\overrightarrow{V_{B\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{1/0}$

En dérivant cette expression par rapport au temps dans R_0, on obtient :

Remarque

Le champ des vecteurs accélération des points d'un solide ne peut pas être décrit par un torseur car ce n'est pas un champ de moment (le double produit vectoriel du dernier terme l'en empêche).
La propriété d'équiprojectivité n'est pas respectée.

4 Composition des mouvements

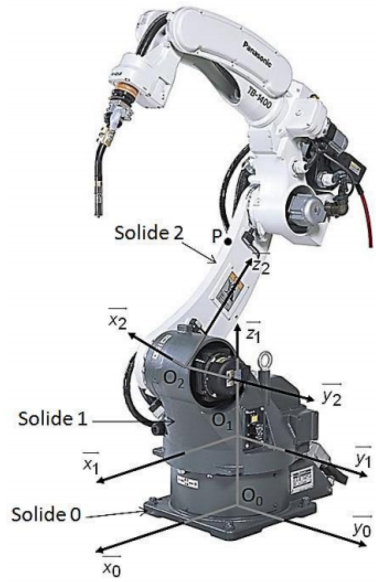
4.1 Composition des vecteurs vitesses

Définition

Soient n solides S_1,S_2, ..., S_n en mouvement les uns par rapport aux autres. On peut alors écrire la relation suivante :

Démonstration :

Soit un point P appartenant à un solide 2 (auquel est associé un repère $R_2(O_2;\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})$) en mouvement par rapport à un solide 1 (auquel est associé un repère $R_1(O_1;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})$), lui-même en mouvement par rapport à un solide 0 (auquel est associé un repère R_0)



Exemple : *Application au mannequin de crash-test*

Retrouver l'expression de $\overrightarrow{V_{G\in 2/S}}$ en utilisant la composition des vecteurs vitesses et la formule de changement de point.

4.2 Composition des vecteurs rotations

Définition

Soient n solides S_1,S_2, ..., S_n en mouvement les uns par rapport aux autres. On peut alors écrire la relation suivante :

Démonstration :

Soit un solide 2 en mouvement par rapport à deux repères R_1 et R_0 liés respectivement aux solides 1 et 0. Soit $\overrightarrow{U}$ un vecteur quelconque.

4.3 Composition des torseurs cinématiques

Soit un solide 2 en mouvement par rapport à deux repères R_1 et R_0 liés respectivement aux solides 1 et 0.

Nous avons établi les relations : $\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \overrightarrow{V_{P\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{P\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{P\in 1/0}}\end{array}\right.$

La composition des vecteurs vitesse et rotation se traduit donc comme la composition des vecteurs cinématiques :

Remarque

- Pour sommer des torseurs, les éléments de réduction doivent être exprimés au même point.
- La composition de mouvement peut faire intervenir n repères intermédiaires : $\left\{\mathcal{V}_{S_n/S_0}\right\}=\left\{\mathcal{V}_{S_n/S_{n-1}}\right\}+\ldots+\left\{\mathcal{V}_{S_1/S_0}\right\}$
- Afin de déterminer la loi d'entrée-sortie cinématique d'un mécanisme, on peut réaliser une « fermeture cinématique » à partir du graphe des liaisons en ne considérant qu'une boucle à la fois. On exploitera alors à bon escient l'une ou l'autre des 2 équations vectorielles qui en découlent (généralement l'équation des vitesses) pour trouver la loi entrée-sortie du mécanisme.

4.4 Composition des accélérations

Le champ des vecteurs accélérations n'est pas un champ de vecteurs équiprojectif. Donc la formule de Varignon ne s'applique pas au vecteur accélération. On ne peut pas faire la composition d'accélération telle que pour les vitesses et rotations.

Définition

La "composition" des vecteur accélération s'écrit donc :

$$\overrightarrow{\Gamma_{P\in 2/1}} = \overrightarrow{\Gamma_{P\in 2/0}} + \overrightarrow{\Gamma_{P\in 0/1}} + 2\overrightarrow{\Omega_{0/1}} \wedge \overrightarrow{V_{P\in 2/0}}$$

Démonstration :

Soit un point P appartenant à un solide S_2 (auquel est associé un repère R_2) en mouvement par rapport à un solide 1 (auquel est associé un repère R_1), lui-même en mouvement par rapport à un solide 0 (auquel est associé un repère R_0)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Gamma_{P\in 2/1}} &= \left.\frac{d\overrightarrow{V_{P\in 2/1}}}{dt}\right|_1 = \left.\frac{d\left(\overrightarrow{V_{P\in 2/0}} + \overrightarrow{V_{P\in 0/1}}\right)}{dt}\right|_1 \\
&= \left.\frac{d\overrightarrow{V_{P\in 2/0}}}{dt}\right|_0 + \overrightarrow{\Omega_{0/1}} \wedge \overrightarrow{V_{P\in 2/0}} + \left.\frac{d\left(\overrightarrow{V_{O_1\in 0/1}} + \overrightarrow{PO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{0/1}}\right)}{dt}\right|_1 \\
&= \overrightarrow{\Gamma_{P\in 2/0}} + \overrightarrow{\Omega_{0/1}} \wedge \overrightarrow{V_{P\in 2/0}} + \overrightarrow{\Gamma_{O_1\in 0/1}} + \left.\frac{d\left(\overrightarrow{PO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{0/1}}\right)}{dt}\right|_1 \\
&= \overrightarrow{\Gamma_{P\in 2/0}} + \overrightarrow{\Gamma_{O_1\in 0/1}} + \left.\frac{d\overrightarrow{\Omega_{0/1}}}{dt}\right|_1 \wedge \overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{\Omega_{0/1}} \wedge \overrightarrow{V_{P\in 2/0}} \\
&\quad + \overrightarrow{\Omega_{0/1}} \wedge \left(\left.\frac{d\overrightarrow{O_1P}}{dt}\right|_0 + \overrightarrow{\Omega_{0/1}} \wedge \overrightarrow{O_1P}\right) \\
\overrightarrow{\Gamma_{P\in 2/1}} &= \overrightarrow{\Gamma_{P\in 2/0}} + \overrightarrow{\Gamma_{P\in 0/1}} + 2\overrightarrow{\Omega_{0/1}} \wedge \overrightarrow{V_{P\in 2/0}}
\end{aligned}$$

Remarque

- Le deuxième terme $\overrightarrow{\Gamma_{P\in 0/1}}$ est appelé accélération d'entraînement du repère R_0 par rapport au repère R1.
- Le dernier terme $2 \cdot \overrightarrow{\Omega}_{0/1} \wedge \overrightarrow{V_{P\in 2/0}}$ est appelé accélération de Coriolis.

4.5 Bilan

Comment calculer une vitesse ? Méthode classique de résolution cinématique.

Methode :

Pour résoudre un problème de cinématique ou pour trouver la vitesse d'un point d'un solide en mouvementpar rapport à un référentiel on adopte souvent la démarche suivante :

Décomposer la vitesse en mouvements élémentaires (rotation ou translation) grâce à la relation de composition des vecteurs vitesses. Par exemple : $\overrightarrow{V_{M\in 3/0}} = \overrightarrow{V_{M\in 3/2}} + \overrightarrow{V_{M\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{M\in 1/0}}$

Selon les mouvements élémentaires obtenus :

- Si le mouvement élémentaire est une rotation, utiliser la formule de changement de point en passant par un point appartenant à l'axe de rotation (vitesse nulle sur l'axe de rotation). Par exemple si 1/0 est une rotation et que A appartient à l'axe de rotation de 1/0 alors : $\overrightarrow{V_{M\in 1/0}} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$
- Si le mouvement élémentaire est une translation alors la vitesse est la même pour tous les points du solide. On utilise alors la formule de dérivation vectorielle en prenant un point qui appartient réellement au solide et pour lequel le vecteur position est simple à exprimer. Par exemple si 2/1 est une translation, P un point appartenant à 2 et O_1 un point fixe dans R_1 alors $\overrightarrow{V_{P\in 2/1}} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1P}(t)}{dt}\right|_{R1}$
- Si le mouvement est une combinaison de rotation et translation et que l'on ne peut pas les décomposer on cherche un point du solide pour lequel on peut trouver la vitesse par dérivation vectorielle (attention aux conditions d'appartenance) ou un point pour lequel la vitesse est donnée puis on utilise la relation de changement de point. Par exemple si je connais la vitesse de B pour le mouvement de 3/2 alors je peux déterminer $\overrightarrow{V_{M\in 3/2}} = \overrightarrow{V_{B\in 3/2}} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/2}}$. Je peux utiliser la composition des vecteurs angulaires pour $\overrightarrow{\Omega_{3/2}}$.

5 Cas particulier du mouvement plan sur plan

Définition

Soient deux solides **1** et **2** en mouvement l'un par rapport à l'autre. Le mouvement de **2** par rapport à **1** est dit plan, ou plan sur plan, s'il existe un plan (2) lié à **2** qui reste constamment en coïncidence avec un plan (1) lié à **1**.

Propriété

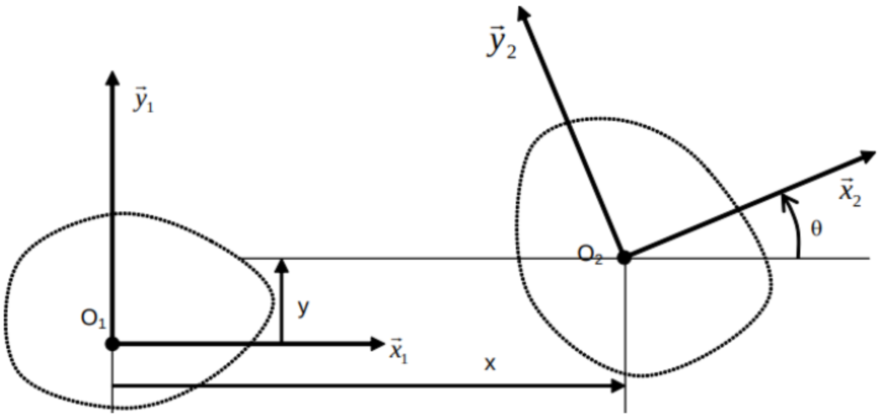
Tous les points du mouvement de **1** par rapport à **2** ont des trajectoires dans des plans parallèles.

Dans la pratique, ce type de mécanisme permet de simplifier les calculs car nous ne regarderons pas trois composantes des torseurs cinématiques. Une méthode de résolution graphique qui n'est pas au programme permet alors de déterminer les vitesses et mouvements du mécanisme.

5.1 Torseur cinématique d'un mouvement plan sur plan

Soient $R_1(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ et $R_2(O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$, deux repères liés respectivement aux solides **1** et **2**, tel que les plans $\Pi_1(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1})$ et $\Pi_2(O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2})$ soient coïncident. On a donc $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_2}$.

Le paramétrage de la position de **2** par rapport à **1** nécessite d'introduire trois paramètres, $(x,\ y,\ \theta)$.



Le torseur cinématique du mouvement de **2** par rapport à **1** s'écrit :

$$\{V_{2/1}\} = \underset{O_2}{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \dot{\theta}\overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{V_{O_2\in 1/0}} = \dot{x}\overrightarrow{x_1} + \dot{y}\overrightarrow{y_1} \end{array} \right\}}$$

Remarque

- le vecteur rotation est perpendiculaire aux plans (Π_1) et (Π_2) ;
- les vecteur vitesses sont parallèles aux plans (Π_1) et (Π_2) ;

Remarque

En généralisant, si on suppose qu'un solide **2** a un mouvement plan par rapport à un repère R_1 lié à un solide **1** (selon un plan de normale $\overrightarrow{z}$), alors la forme générale du torseur cinématique de ce solide dans R_1 s'écrit :

$$\{V_{2/1}\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} r\overrightarrow{z} \\ u\overrightarrow{x} + v\overrightarrow{y} \end{array} \right\}}$$

Les torseurs cinématiques des liaisons normalisées peuvent donc être « simplifiés » en conséquence si une hypothèse de mouvement plan est réalisée.

5.2 Centre instantané de rotation

Soit Δ l'axe central du torseur cinématique du mouvement d'un solide **2** par rapport à un solide **1** ou axe instantané de rotation. Δ est l'ensemble des points H définis par :

$$\overrightarrow{O_2H} = \frac{\overrightarrow{\Omega_{1/2}} \wedge \overrightarrow{V_{O_2\in 2/1}}}{\overrightarrow{\Omega_{1/2}}^2} + k\overrightarrow{\Omega_{1/2}} = \overrightarrow{O_2I_{2/1}} + k\overrightarrow{\Omega_{1/2}}$$

Le point $I_{2/1}$ est l'intersection de l'axe central avec les plans (Π_1) et (Π_2). Ce point est appelé Centre Instantané de Rotation du mouvement de **2** par rapport à **1**. On le note CIR.

Remarque *Calcul du moment central*

$\overrightarrow{V_{I_{2/1}\in 2/1}}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\Omega_{1/2}}$ et $\overrightarrow{V_{I_{2/1}\in 2/1}}$ est parallèle aux plans (Π_1) et (Π_2), donc

$$\overrightarrow{V_{I_{2/1}\in 2/1}} = \overrightarrow{0}$$

Si 2 solides sont en mouvement plan sur plan (de normale $\overrightarrow{z}$), alors à tout instant on peut considérer que le mouvement de 2/1 ou 1/2 est une rotation autour d'un axe de rotation de direction :

- Si le mouvement est quelconque, cet axe de rotation se déplacera à chaque instant perpendiculairement au plan d'étude : c'est un axe instantané de rotation.
- Pour un mouvement de rotation, cet axe est fixe.

Propriété *Vitesse nulle*

$I_{1/2} = I2/1 \Longrightarrow \overrightarrow{V_{I_{2/1}\in 2/1}} = \overrightarrow{0}$ La vitesse est nulle au centre de rotation

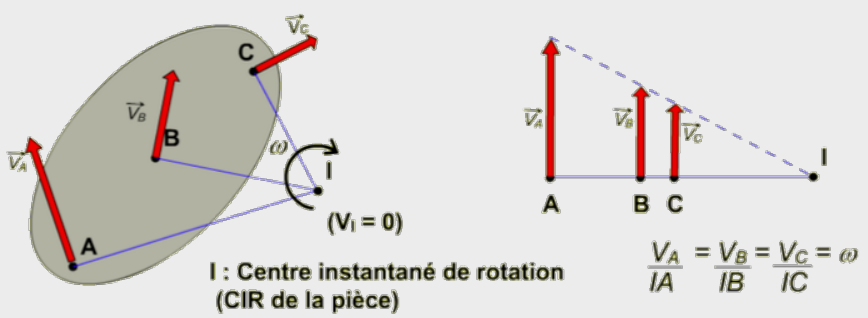
Propriété *Direction du vecteur vitesse*

$\overrightarrow{V_{P\in 2/1}} = \overrightarrow{V_{I_{2/1}\in 2/1}} + \overrightarrow{PI_{2/1}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \Longrightarrow \overrightarrow{V_{P\in 2/1}} = \overrightarrow{PI_{2/1}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \Longrightarrow \overrightarrow{V_{P\in 2/1}} \perp \overrightarrow{PI_{2/1}}$ La vitesse en un point est perpendiculaire à la droite entre le point et le CIR

Propriété *Proportionnalité*

$\|\overrightarrow{V_{P\in 2/1}}\| = \|\overrightarrow{PI_{2/1}}\|\|\overrightarrow{\Omega_{2/1}}\| = \omega R \Longrightarrow \|\overrightarrow{V_{P\in 2/1}}\|$ est proportionnel à $\|\overrightarrow{PI_{2/1}}\|$

Remarque *Application graphique*



5.3 Base et roulante

Définition *Base et roulante*

Le centre instantané de rotation $I_{2/1}$ du mouvement d'un solide **2** par rapport à un solide **1** se déplace généralement dans le temps par rapport à **1** et **2**. Il a donc une trajectoire dans chacun des repères.

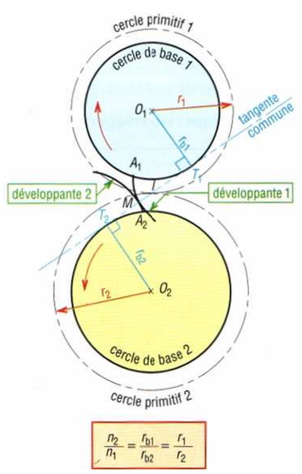
- La trajectoire du point $I_{2/1}$ dans le repère **1** est la **base** du mouvement plan sur plan de **2** par rapport à **1**.

- La trajectoire du point $I_{2/1}$ dans le repère **2** est la **roulante** du mouvement plan sur plan de **2** par rapport à **1**.

Propriété

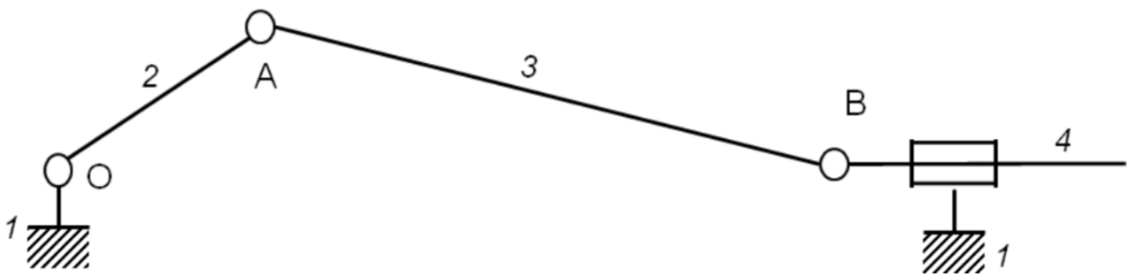
La base et la roulante sont deux courbes tangentes qui roulent sans glisser l'une sur l'autre.

C'est grâce à cette propriété que l'on détermine la forme en développante de cercle des dentures des engrenages. La forme d'une dent suit la position du centre instantané de rotation. L'une formant la base et l'autre la roulante.



Exemple : *Micromoteur*

Soit un moteur de modélisme dont le schéma cinématique est donné ci-dessous, La manivelle **2** tourne à une vitesse constante avec $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \omega \overrightarrow{z_1}$ où $\omega = 4\,\text{rad.s}^{-1}$



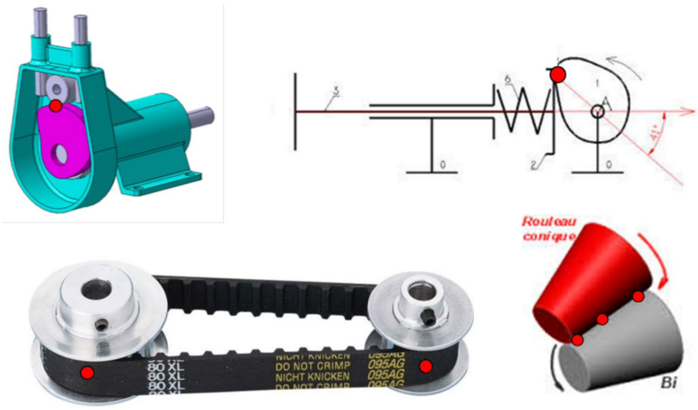
Echelle : 1cm <-> 5cm/s

6 Cinématique du contact ponctuel entre 2 solides - Cinématique du point immatériel

6.1 Point coïncident

Dans de nombreux mécanismes, la liaison entre deux solides est modélisée par un contact ponctuel. Cependant, l'écriture du torseur cinématique correspondant au mouvement entre les deux solides n'est pas toujours évidente.

Dans les exemples de mécanismes ci-dessous, un point de contact (pris sur la ligne de contact) entre est appelé « point coïncident », il peut bouger ou être immobile par rapport au repère fixe (voir premier point du cours précédent.



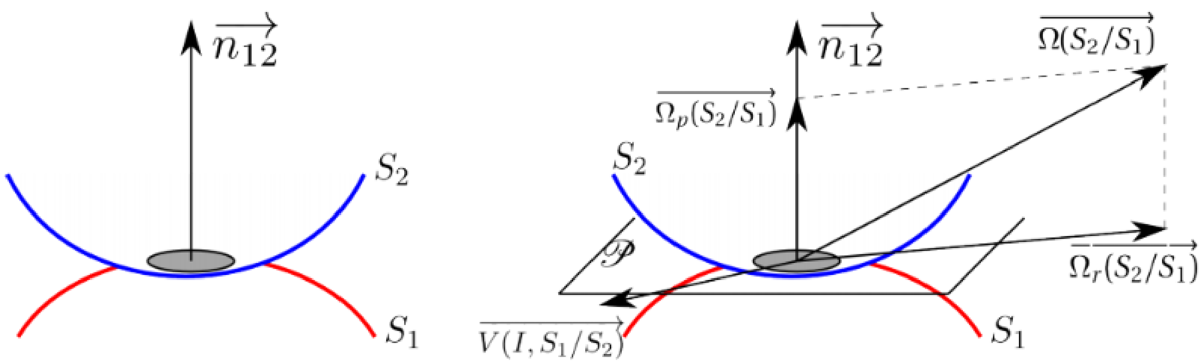
Il existe tout beaucoup de système qui utilisent un contact ponctuel ou équivalent pour la transformation de mouvement. Nous allons mettre en place les méthodes de résolution liées à ce type de système

6.2 Hypothèses

Considérons deux solides S_1 et S_2 en contact ponctuel.

Définissons alors I le point de contact entre les deux solides et $\overrightarrow{n_{12}}$ la normale de contact. On appelle $\mathcal{P}$ le plan normal à $\overrightarrow{n_{12}}$ en I . Il est tangent à S_1 et S_2.

On note $\overrightarrow{\Omega_{2/1}}$ le vecteur instantané de rotation entre S_2 et S_1 et $\overrightarrow{V_{I\in 2/1}}$ le vecteur vitesse de glissement entre les deux solides.



6.3 Vecteur vitesse de glissement

Cinématiquement, le point I n'est pas unique. En effet, on peut distinguer l'existence de 3 points différents :

- le point I matériel appartenant au solide S1 ;
- le point I matériel appartenant au solide S2 ;
- le point I (non matériel) correspondant au point de contact entre les deux solides.

À l'instant t, ces points peuvent être confondus. À $t + dt$ ils peuvent être distincts. En conséquence, la propriété de la cinématique du solide sur la vitesse des points de contact n'est plus valable, en particulier :

$$\overrightarrow{V_{I\in 2/1}} \neq \overrightarrow{0} \text{ et donc} \overrightarrow{V_{I\in 2/0}} \neq \overrightarrow{V_{I\in 1/0}}$$

6.3.1 Définition

Définition

Le vecteur vitesse de glissement au point I du solide S_2 par rapport au solide S_1 est le vecteur :

Le vecteur vitesse de glissement $\overrightarrow{V_{P\in 2/1}}$ est alors parallèle au plan tangent commun en I à S_1 et S_2.

6.3.2 Roulement sans glissement

Définition

On dira que S_2 roule sans glisser sur S_1 en I si la vitesse de glissement est nulle :

6.4 Vecteurs rotation de roulement et rotation de pivotement

On a vu que dans le cas d'un contact ponctuel il existait 3 degrés de libertés de rotation paramétrables par les angles d'Euler. Nous ne cherchons pas ici à calculer directement le vecteur $\overrightarrow{\Omega_{2/1}}$ en fonction de ces angles. Cependant, ce vecteur est décomposable en une somme de deux vecteurs.

6.4.1 Le vecteur de pivotement

Définition

Le vecteur pivotement est normal au plan $\mathcal{P}$, il correspond à un pivotement autour de la normale commune de S_2/S_1. On le note $\overrightarrow{\Omega_{p2/1}}$ On a donc :

$$\overrightarrow{\Omega_{p2/1}} = \|\overrightarrow{\Omega_{2/1}} \cdot \overrightarrow{n_{12}}\|.\overrightarrow{n_{12}}$$

6.4.2 Le vecteur de roulement

Définition

Le vecteur roulement est contenu dans le plan $\mathcal{P}$, il correspond à un roulement dans le plan tangent de S_2/S_1. On le note $\overrightarrow{\Omega_{r2/1}}$ On a donc :

On obtient donc au final :

Soient deux solides 1 et 2 en contact ponctuel en un point P. Soit (π) le plan tangent commun en P à 1 et 2.

Remarque

Les composantes de pivotement et de roulement du vecteur rotation dépendent du point de contact contrairement au vecteur rotation qui est indépendant du point considéré.

6.5 Méthode de calcul de vitesse de glissement

Methode :

- Décomposer le mouvement en : $\overrightarrow{V_{I\in 2/1}} = \overrightarrow{V_{I\in 2/0}} - \overrightarrow{V_{I\in 1/0}}$
- Calculer $\overrightarrow{V_{I\in 2/0}}$
- Calculer $\overrightarrow{V_{I\in 1/0}}$

Attention

I n'est pas un point matériel. Il n'appartient ni à S_1 ni à S_2. On ne peut donc pas calculer $\left.\frac{d\overrightarrow{OI}(t)}{dt}\right|_{R0}$