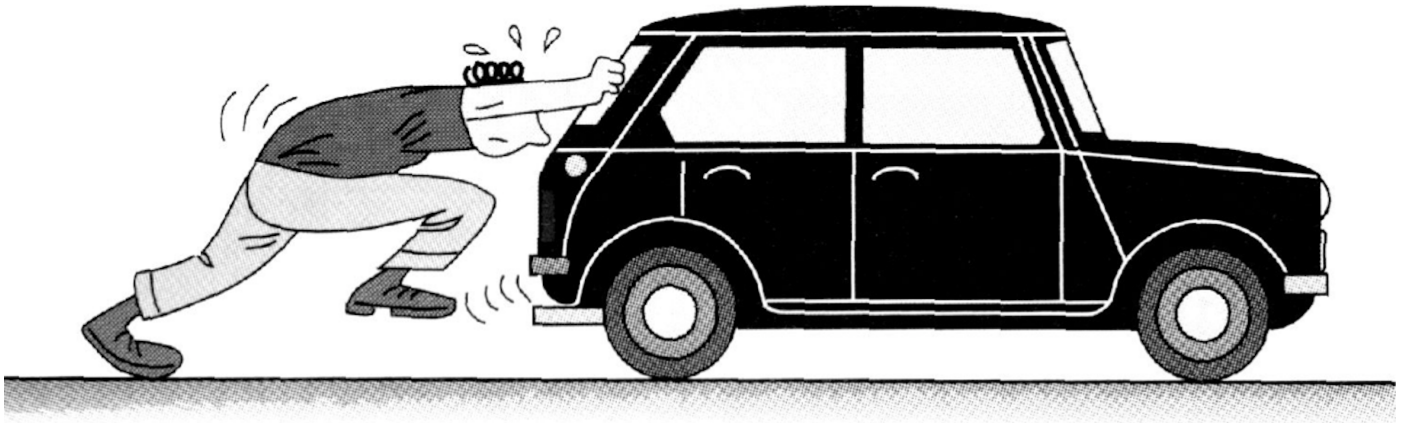




MODÉLISATION DES ACTIONS MÉCANIQUES



Compétences visées:

- B2-16** Modéliser une action mécanique.
- C2-07** Déterminer les actions mécaniques en statique.

Table des matières

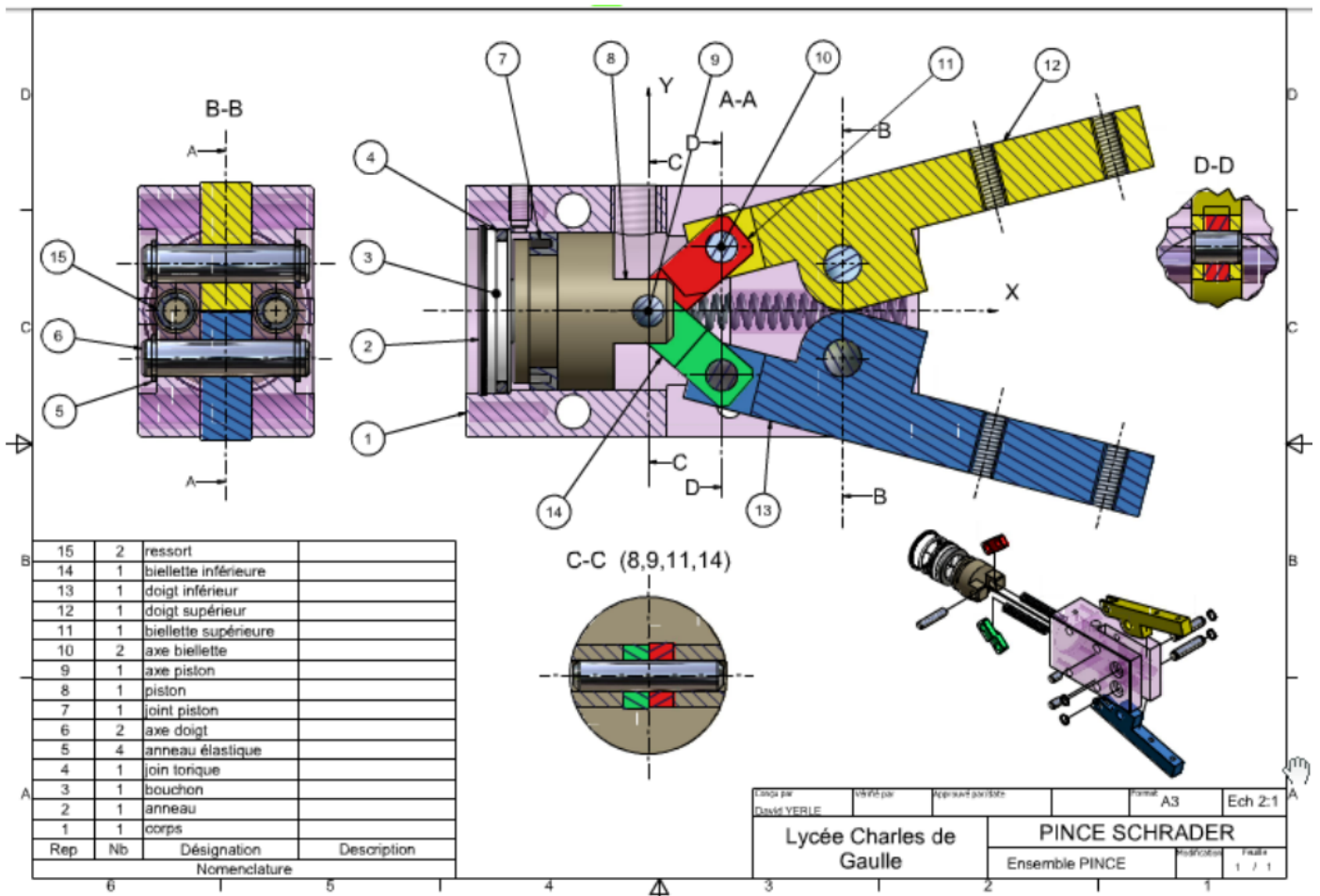
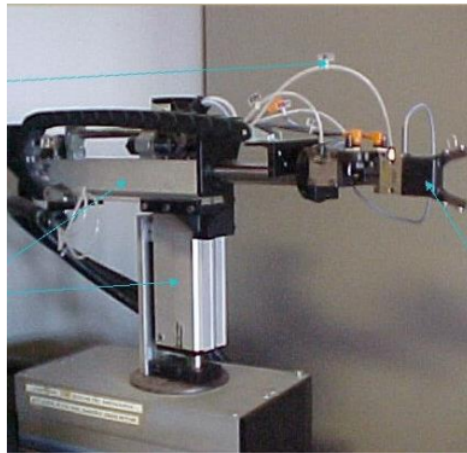
1	Notion d'action mécanique	4
1.1	Définition	4
1.2	Actions mécaniques à distance	4
1.3	Actions mécaniques de contact	4
2	Torseur des actions mécaniques	5
2.1	Modélisation locale d'une action mécanique	5
2.2	Modélisation globale d'une action mécanique : notion de résultante	6
2.3	Notion de moment résultant	7
2.3.1	Définition	7



2.3.2	Interprétation physique	7
2.3.3	Notion de « bras de levier »	8
2.4	Torseur d'actions mécaniques	9
2.5	Torseurs particuliers	10
2.5.1	Torseur glisseur	10
2.5.2	Torseur couple	10
3	Actions mécaniques de contact	11
3.1	Cas de la pression d'action d'un fluide sur un solide	11
3.1.1	Rappels	11
3.1.2	Action mécanique exercée par un fluide	11
3.2	Cas des liaisons parfaites entre solides indéformables	12
3.2.1	Définition	12
3.2.2	Propriété fondamentale	12
3.2.3	Exemples de torseurs d'actions mécaniques transmissibles dans des liaisons parfaites	12
3.2.4	Convention	13
3.2.5	Dualité entre le torseur statique et le torseur cinématique des liaisons usuelles	14
3.2.6	Tableau des liaisons parfaites	15
4	Une action mécanique à distance particulière : la pesanteur	16
4.1	Définition	16
4.1.1	Modèle local	16
4.1.2	Modèle global	16
4.2	Masse, Poids et Centre de Gravité	16
4.2.1	Masse	16
4.2.2	Poids	16
4.2.3	Centre de gravité	17
4.2.4	Propriétés du centre de gravité	17
4.2.5	Théorèmes de Guldin	18

Support d'application

- Pince de robot (dite pince « Schröder »)



Objectif

Modéliser les efforts subis par les différentes pièces du système afin de les dimensionner

1 Notion d'action mécanique

1.1 Définition

Définition

On appelle action mécanique toute cause susceptible de maintenir un corps au repos, ou de créer un mouvement, ou de déformer un corps.

On définit donc deux grands types d'actions mécaniques sur un système matériel :

- Actions mécaniques à distance
- Actions mécaniques de contact

1.2 Actions mécaniques à distance

Lorsque les actions mécaniques sont dites « à distance », on parle d'actions volumiques.

Chaque élément de volume de l'ensemble matériel, aussi petit soit-il, subit une action mécanique élémentaire.

Exemple :

- Les actions mécaniques créées par un champ électro-magnétique
- L'action de la pesanteur (attraction de la Terre sur un ensemble matériel)

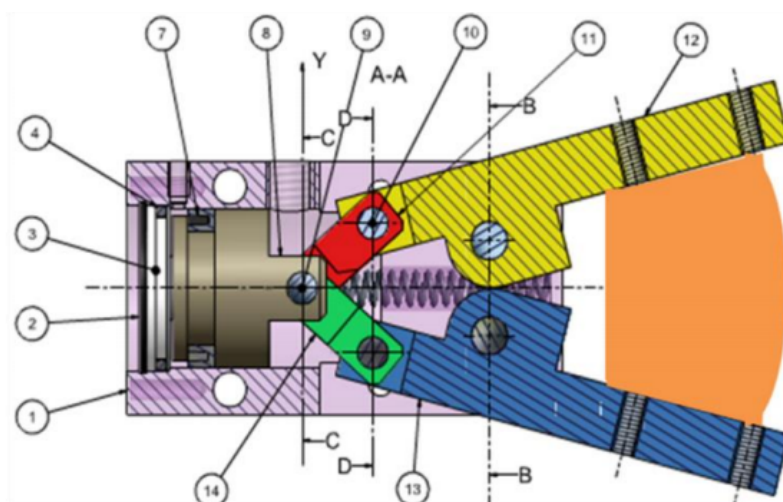
1.3 Actions mécaniques de contact

Lorsque les actions mécaniques sont « de contact », on parle d'actions surfaciques.

Si 2 ensembles matériels sont en contact sur une surface frontière commune, chaque élément de surface d'un ensemble matériel, aussi petit soit-il, subit une action mécanique élémentaire exercée par l'autre ensemble matériel.

Elles s'exercent via une surface de contact entre le système considéré et un autre système matériel.

Pince de robot serrant un flacon de parfum :



2 Torseur des actions mécaniques

2.1 Modélisation locale d'une action mécanique

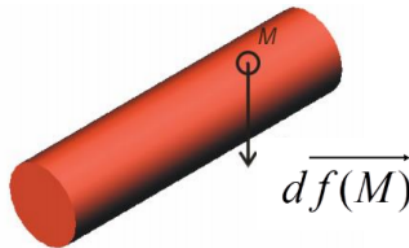
Une action mécanique élémentaire est toujours exercée par un ensemble matériel sur un élément de volume ou de surface d'un autre ensemble matériel.

Cette action mécanique élémentaire, s'exerçant sur un petit élément défini (de volume ou de surface) caractérisé par un point M lui appartenant, est définie par :

- Son intensité, exprimée en Newton (N)
- Sa direction (soit un vecteur)

S'agissant d'une action mécanique élémentaire, son intensité est proportionnelle au volume « dV » de l'élément de volume ou à la surface « dS » de l'élément de surface considéré.

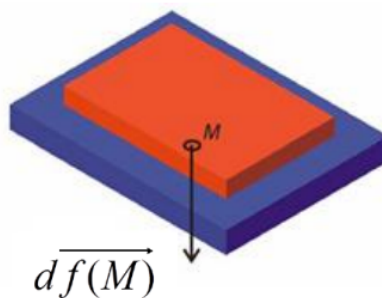
Cas d'une action mécanique à distance élémentaire :



On notera : $\overrightarrow{df(M)} = -\mu(M) \cdot dV \cdot \overrightarrow{u(M)}$, une action mécanique à distance élémentaire avec :

- $\mu(M)$ la densité d'effort volumique au point M (unité : N/m^3)
- $\overrightarrow{u(M)}$ le vecteur unitaire indiquant la direction et le sens de l'action mécanique à distance élémentaire.

Cas d'une action mécanique de contact élémentaire :



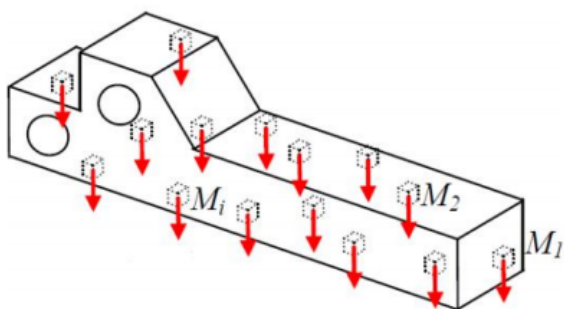
On notera : $\overrightarrow{df(M)} = -p(M) \cdot dS \cdot \overrightarrow{n(M)}$, une action mécanique de contact élémentaire avec :

- $p(M)$ la densité d'effort surfacique au point M (unité : N/m^2)
- $\overrightarrow{n(M)}$ le vecteur unitaire normal à la surface de contact en M

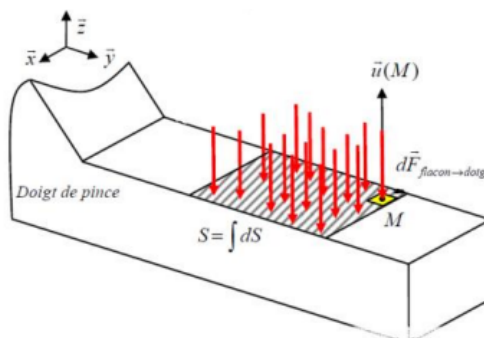
2.2 Modélisation globale d'une action mécanique : notion de résultante

Une action mécanique d'un ensemble matériel 1 sur un autre ensemble matériel 2 est en fait le résultat des effets produits par une infinité d'actions élémentaires de contact ou à distance.

Cette action mécanique globale est modélisée par le champ des vecteurs $\vec{df}(M)$ définis en chaque point M du volume ou de la surface concernée de l'ensemble matériel 2.



Cas d'actions volumiques à distance
(exercées par la pesanteur sur un doigt de la pince)



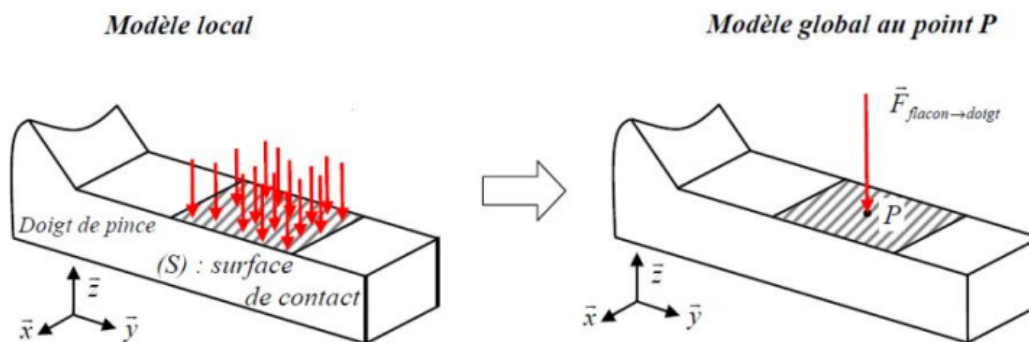
Cas d'actions surfaciques de contact
(exercées par le flacon sur un doigt de la pince)

Considérons dans un premier temps que l'ensemble matériel 2 est constitué d'un nombre fini n d'éléments, caractérisés par un nombre fini n de points M, et sur lesquels s'exercent les actions mécaniques élémentaires $\vec{df}(M)$ dues à 1, alors la résultante des actions mécaniques exercées par 1 sur 2 peut être définie par :

Considérons à présent que l'ensemble matériel 2 est constitué d'un nombre infini d'éléments infiniment petits caractérisés par un nombre infini de points M, et sur lesquels s'exercent les actions mécaniques élémentaires $\vec{df}(M)$ dues à 1, alors, en utilisant le calcul intégral, la résultante des actions mécaniques exercées par 1 sur 2 peut être définie par :

- $\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \iiint_V \vec{df}(M)$ dans le cas d'actions volumiques (à distance)
- $\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \iint_S \vec{df}(M)$ dans le cas d'actions surfaciques (de contact)

Exemple : Application à la pince de robot tenant un flacon de parfum



Calculons la résultante du torseur des actions mécaniques du flacon sur le doigt inférieur de la pince $\vec{F}_{flacon \rightarrow doigt}$. La pression p de contact entre le flacon et le doigt de la pince est supposée constante sur toute la surface S. A.N : La pression p maxi admissible par le flacon avant sa casse est de 10 bars (= $10 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ Mpa}$). La surface de contact S est de 200 mm^2 .

2.3 Notion de moment résultant

2.3.1 Définition

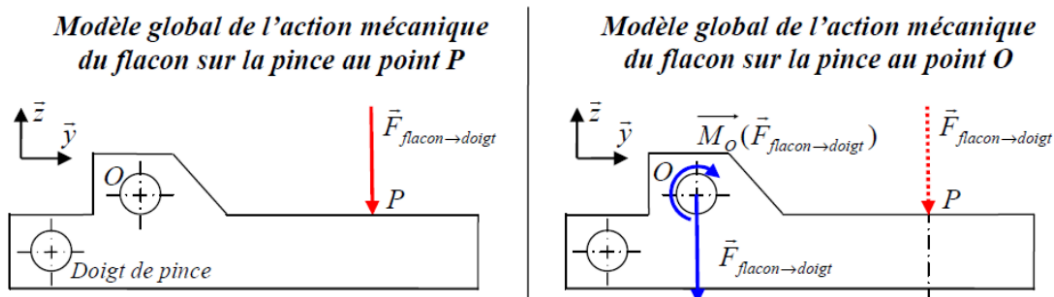
On appelle moment en O d'une force appliquée en M le vecteur noté $\overrightarrow{M_{O,2 \rightarrow 1}}$ défini par :

D'un point de vue local, ce moment s'écrira :

2.3.2 Interprétation physique

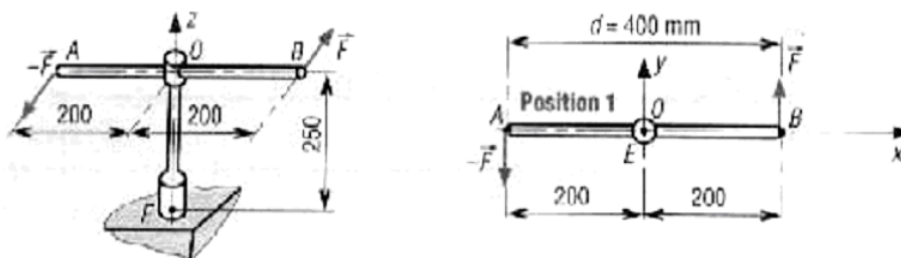
Exemple : Application à la pince de robot

Si l'on s'intéresse à l'effet au point O de l'action mécanique de contact du flacon sur le doigt inférieur de la pince, on constate que celle-ci a tendance à pousser le doigt suivant la direction de $\overrightarrow{F_{flacon \rightarrow doigt}}$, mais aussi à faire tourner le doigt autour de l'axe (O, \vec{x}) . Il faut alors modéliser au point O l'action mécanique du flacon sur le doigt par une force $\overrightarrow{F_{flacon \rightarrow doigt}}$ et un moment en O $\overrightarrow{M_{O,flacon \rightarrow doigt}}$.



Exemple :

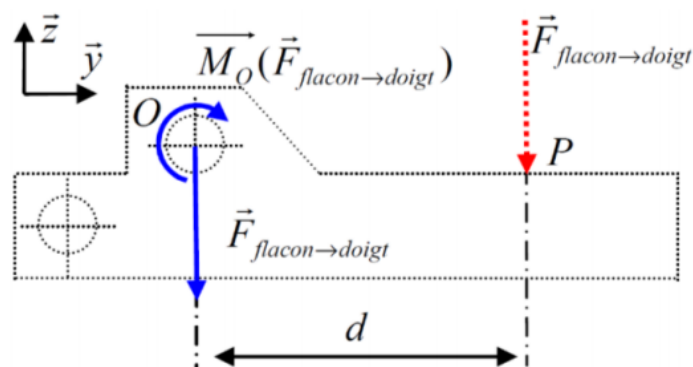
Une clef à bougie se compose d'un corps et d'une tige de manœuvre coulissante et réglable.



$\overrightarrow{F_A}$ et $\overrightarrow{F_B}$ schématisent les actions exercées par les mains de l'opérateur en A et B. Nous les modélisons par des forces ponctuelles par soucis de simplification, bien que cela n'existe pas réellement.

Si $\|\overrightarrow{F_A}\| = \|\overrightarrow{F_B}\| = F = 100 \text{ N}$, démontrons l'existence d'un moment ou couple créé en O, et déterminons sa valeur.

2.3.3 Notion de « bras de levier »



Un calcul analytique rigoureux du moment en O $\overrightarrow{M_{O,flacon \rightarrow doigt}}$ serait le suivant :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{O,flacon \rightarrow doigt}} &= \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{F_{flacon \rightarrow doigt}} \\ &= (d \cdot \overrightarrow{y} - a \cdot \overrightarrow{z}) \wedge -F_{flacon \rightarrow doigt} \cdot \overrightarrow{z} \\ &= -d \cdot F_{flacon \rightarrow doigt} \cdot \overrightarrow{x} \end{aligned}$$

Pour calculer rapidement le moment d'une force, on peut utiliser la technique du bras de levier qui nous permet d'écrire directement la norme du moment induit par la force si on connaît la distance qui sépare le point d'application de la force du point de calcul du moment (le « bras de levier »).

Ici, on obtiendrait directement :

La distance d correspond sur l'exemple au **bras de levier**.

Remarque

On peut déterminer le signe (+ ou -) du moment en O induit par la force selon le sens dans lequel la force a tendance à faire tourner la pièce au point O. Sous l'action de la force, si la pièce a tendance à tourner en O :

- dans le sens trigonométrique, alors le moment induit en O sera positif
- dans le sens horaire, alors le moment induit en O sera négatif

Dans l'exemple ci-dessus, $\overrightarrow{F_{flacon \rightarrow doigt}}$ a tendance à faire tourner le doigt de la pince dans le sens horaire en O. D'où le signe - dans le résultat : $\overrightarrow{M_{O,flacon \rightarrow doigt}} = -d \cdot F_{flacon \rightarrow doigt} \cdot \overrightarrow{x}$

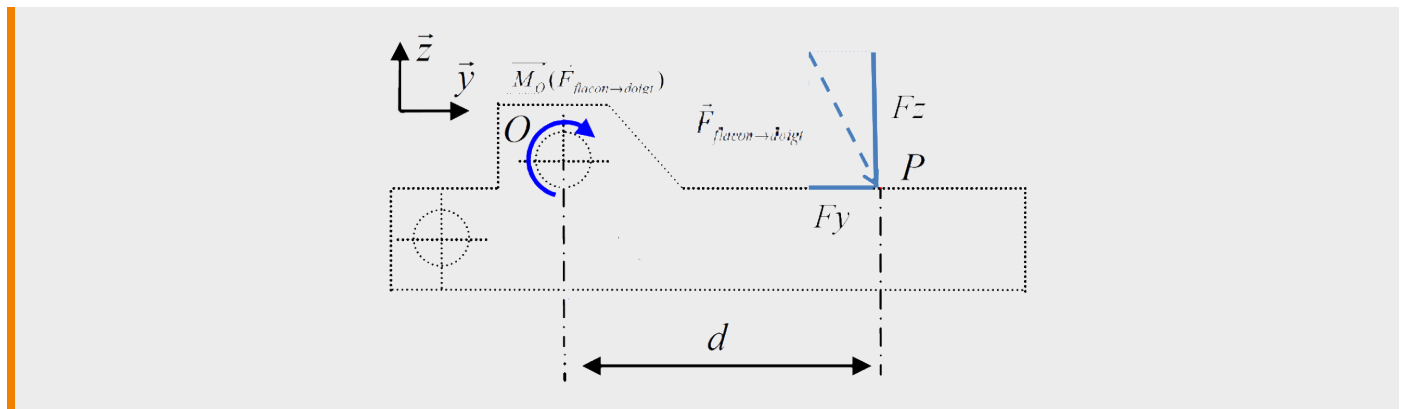
Remarque

Attention, si la force appliquée par le flacon sur le doigt en P n'avait pas été dirigée selon \overrightarrow{z} (cf figure ci-dessous par exemple), alors il aurait fallu aussi prendre en compte dans le calcul du moment en O la composante selon \overrightarrow{y} : F_y de

$$\overrightarrow{F_{flacon \rightarrow doigt}}$$

En effet, cette composante selon \overrightarrow{y} est aussi « créatrice » d'un moment en O.





On trouverait donc pour cet exemple :

2.4 Torseur d'actions mécaniques

Toute action mécanique d'un ensemble matériel 1 sur un ensemble matériel 2 peut être modélisée par le torseur des actions mécaniques de 1 sur 2 associé au champ des vecteurs qui modélise l'ensemble des actions mécaniques élémentaires de 1 sur 2.

Ce torseur des actions mécaniques exercées par 1 sur 2 peut être défini en un point O par :

- dans le cas d'actions volumiques (à distance) :

- dans le cas d'actions surfaciques (de contact) :

Finalement, au lieu d'être définie par un champ complexe de vecteurs élémentaires, une action mécanique peut donc être modélisée globalement par la connaissance d'un torseur (donc de 2 vecteurs) :

- La résultante du torseur d'actions mécaniques $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ (Unité : N)
- Le moment en un point (ici O) du torseur d'actions mécaniques $\vec{M}_{O,1 \rightarrow 2}$ (Unité : N.m)

Rappels sur l'outil mathématique torseur :

Pour déplacer ces torseurs écrits en O en un autre point A, il faut utiliser les propriétés de l'outil torseur :

- La résultante est invariante quelque soit le point d'application
- Le moment en A est donné par la formule suivante : $\vec{M}_{A,1 \rightarrow 2} = \vec{M}_{O,1 \rightarrow 2} + \vec{AO} \wedge \vec{R}_{1 \rightarrow 2}$

Cas particulier :

Dans le cas où un ensemble matériel 2 subit une action mécanique de la part d'un autre ensemble matériel 1 représentée par un système de n forces \vec{F}_i qui s'exercent respectivement en n points P_i , on caractérise globalement cette action mécanique par le torseur ci-dessous :

$$\{\tau_{1 \rightarrow 2}\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \\ \vec{M}_{O,1 \rightarrow 2} = \sum_{i=1}^n \vec{OP}_i \wedge \vec{F}_i \end{array} \right.$$

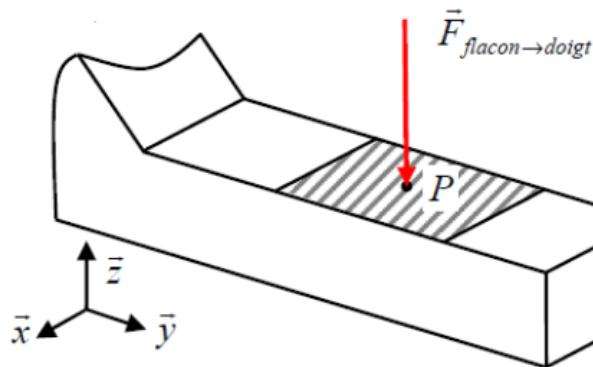
2.5 Torseurs particuliers

2.5.1 Torseur glisseur

Un torseur d'action mécanique est un glisseur s'il est de la forme :

L'axe central de ce glisseur est la droite passant par O , de direction celle de \vec{R} . Tous les points de cet axe ont donc un moment nul. Dans ce cas particulier, l'action mécanique est appelée force et l'axe central du glisseur est le support de la force.

Exemple : Application à la pince de robot



Le torseur des actions mécaniques du flacon sur le doigt inférieur de la pince est un torseur glisseur au point P , centre de symétrie de la surface de contact S .

NB : le moment induit par toutes les actions élémentaires du flacon sur le doigt est nul en P car P est centre de symétrie de la surface de contact S (symétrie géométrique et symétrie du chargement).

2.5.2 Torseur couple

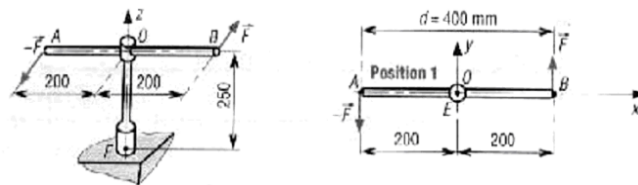
Un torseur d'action mécanique est un couple s'il est de la forme :

Remarque

Ce torseur a la même expression pour tout point de l'espace.

Exemple : Clé

Le torseur des actions mécaniques de l'opérateur sur la clé est un torseur couple.



3 Actions mécaniques de contact

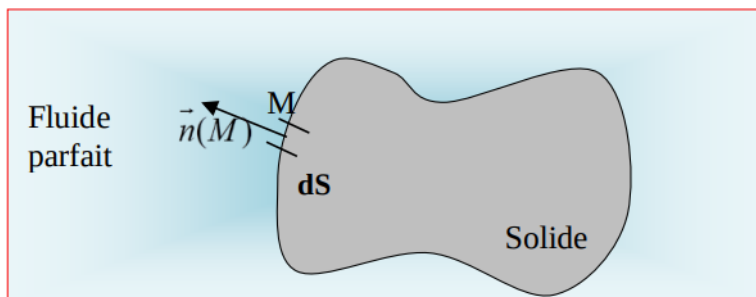
3.1 Cas de la pression d'action d'un fluide sur un solide

3.1.1 Rappels

La pression est une des variables thermodynamiques qui permet de caractériser l'état d'un fluide (voir cours de thermodynamique de physique) au même titre que la température, la masse volumique ...

Un fluide parfait est un fluide dans lequel les forces de contact sont orthogonales aux éléments de surface sur lesquels elles s'exercent. Nous considérerons dans les exemples les plus courants des fluides parfaits.

3.1.2 Action mécanique exercée par un fluide



L'action mécanique élémentaire exercée par un fluide parfait sur une surface dS d'un système matériel S s'écrit en introduisant la pression $p(M)$ de contact entre le fluide et le solide S au point M :

$$\overrightarrow{df_{fluide \rightarrow S}(M)} = -p(M) \cdot \vec{n} \cdot dS$$

ou encore

$$\frac{d\vec{f}(M)}{dS} = -p(M) \cdot \vec{n}$$

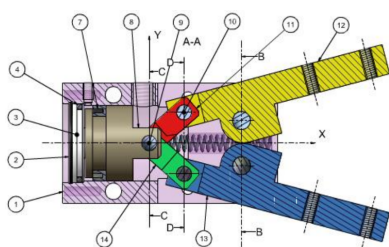
Remarque

On retrouve la forme de la relation connue $p=F/S$

Alors le torseur des actions mécaniques du fluide s'exerçant sur la surface S s'écrit donc en un point O quelconque :

$$\{\tau_{fluide \rightarrow S}\}_{\forall O} = \left\{ \begin{array}{l} \iint_S -p(M) \cdot \vec{n} \cdot dS \\ \iint_S \vec{OM} \wedge (-p(M) \cdot \vec{n}) \cdot dS \end{array} \right\}$$

Exemple : Application à la pince de robot



Ecrivons le torseur des actions mécaniques de l'air sur le piston 8 au centre I de la section du piston. (A.N : La pression de l'air est de 6 bars = $6 \cdot 10^5$ Pa = 0.6 Mpa. Le diamètre du piston est 30 mm.)

3.2 Cas des liaisons parfaites entre solides indéformables

3.2.1 Définition

Une liaison entre deux solides est dite parfaite si les surfaces de contact qui constituent cette liaison sont géométriquement parfaites, que le contact se fait sans jeu et sans frottement.

Pour définir une liaison, on doit associer, à la surface de contact (ou à la ligne de contact ou au point de contact) entre les deux solides 1 et 2 en liaison, un repère, n'appartenant ni à 1, ni à 2 mais dépendant de la nature de la géométrie du contact. Ce repère tient compte des particularités de la géométrie du contact.

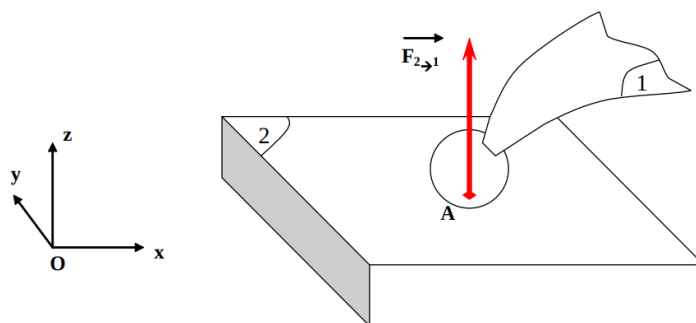
3.2.2 Propriété fondamentale

Dans une liaison parfaite, l'action mécanique élémentaire, en un point M de la surface de contact, exercée par le solide 2 sur le solide 1 est portée par la normale à la surface de contact.

3.2.3 Exemples de torseurs d'actions mécaniques transmissibles dans des liaisons parfaites

Cas de la liaison ponctuelle parfaite (sans frottements) :

On considère une liaison ponctuelle parfaite, comme sur le schéma ci-dessous :



La surface de contact est un point. On lui associe le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Dans le cas d'une liaison parfaite, nous avons vu que l'action mécanique élémentaire en A de 2 sur 1 est nécessairement orthogonale à la surface de contact. Ainsi, on a :

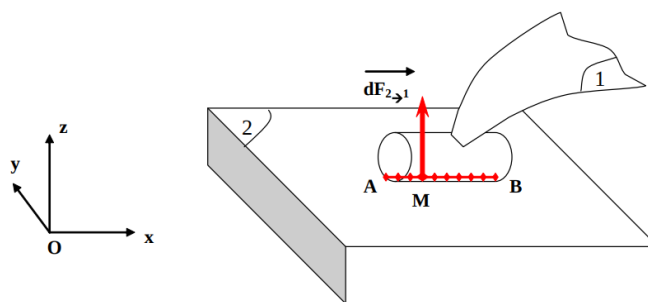
$$\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}} = F \cdot \vec{z} \quad \text{avec } F > 0$$

Ainsi, l'action mécanique globale de 2 sur 1 s'écrit :

Ce torseur s'appelle torseur d'inter-efforts ou torseur statique ou torseur d'action mécanique transmissible par la liaison considérée.

Exemple : Application à la pince de robot

On considère à présent que le flacon est un cylindre indéformable. On se retrouve dans le cas d'une liaison linéaire rectiligne parfaite (sans frottements).



Paramétrons alors cette liaison linéaire rectiligne de direction (A, \vec{x}) et de normale \vec{z} selon le schéma ci-dessous. Cette liaison peut être décomposée en une somme de contacts ponctuels tels que la pression linéique p soit constante sur l'arête du cylindre AB. La résultante globale vaut :

$$\overrightarrow{R_{2 \rightarrow 1}} = \int_{AB} \overrightarrow{dF_{2 \rightarrow 1}} = \int_{AB} p \cdot \vec{z} = p \cdot L \cdot \vec{z}$$

Le moment global vaut :

$$\overrightarrow{M_{A, 2 \rightarrow 1}} = \int_{AB} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{dF_{2 \rightarrow 1}} = \int_{AB} x \cdot \vec{x} \wedge p \cdot \vec{z} = \int_{AB} -x \cdot p \cdot \vec{y} = -p \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^L \cdot \vec{y} = -p \cdot \frac{L^2}{2} \cdot \vec{y}$$

Le torseur des actions transmissibles par une liaison linéaire rectiligne en O, de direction (A, \vec{x}) et de normale \vec{z} , s'écrit alors :

3.2.4 Convention

Tous les torseurs d'actions mécaniques transmissibles dans les liaisons usuelles s'écriront de la manière suivante, dans un repère adapté à la géométrie de la liaison (cf cours de modélisation des liaisons en cinématique) :

3.2.5 Dualité entre le torseur statique et le torseur cinématique des liaisons usuelles

Le cours de dynamique de deuxième année définira la puissance des inter-efforts entre les solides S_2 et S_1 par le co-moment des deux torseurs, cinématique et statique, bien sûr exprimés au même point :

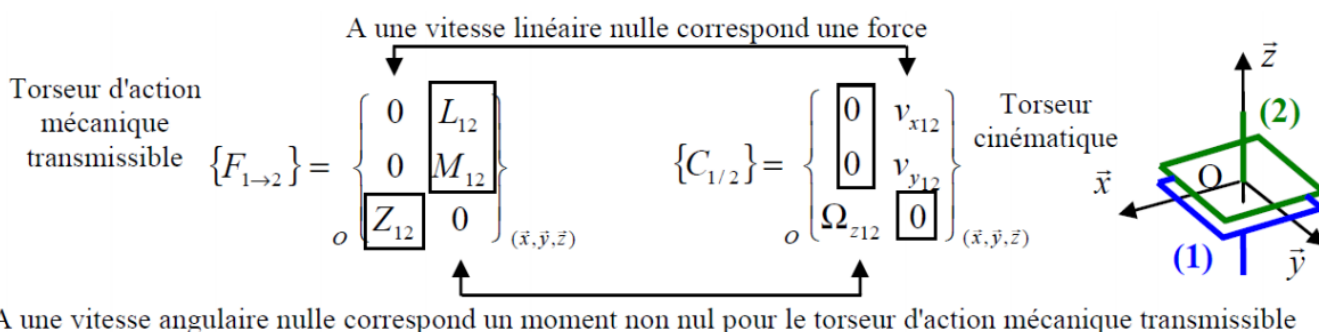
$$P(S_1 \rightarrow S_2) = V_{S_1/S_2} \cdot \tau_{S_1 \rightarrow S_2} = \overrightarrow{R_{S_2 \rightarrow S_1}} \cdot \overrightarrow{V_{O \in S_1/S_2}} + \overrightarrow{M_{O, S_2 \rightarrow S_1}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S_1/S_2}}$$

Une liaison parfaite a alors une puissance d'inter efforts nulle, quelque soit le torseur cinématique compatible avec la liaison. Cependant, la réciproque est fautive (voir cours de seconde année). Ainsi, il est possible de déduire la forme du torseur statique à partir de celle du torseur cinématique, que vous connaissez déjà.

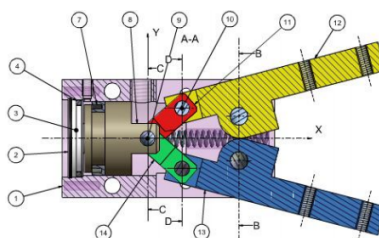
Remarque

Un moyen mnémotechnique pour retrouver le torseur statique à partir du torseur cinématique est de remplacer les 0 par des inconnues d'effort et les inconnues de mouvement par des 0 en **inversant les deux colonnes**. Le co-moment des 2 torseurs doit être nul. La liaison hélicoïdale reste particulière (Voir le tableau page précédente).

Exemple : Liaison appui-plan :



Exemple : Application à la pince de robot



Connaissant le torseur cinématique de la liaison Pivot glissant entre le piston 8 et le bâti, déterminons la forme du torseur des actions mécaniques du bâti sur le piston 8.

3.2.6 Tableau des liaisons parfaites

Nom de la liaison entre le solide 1 et le solide 2	Schématisation dans le plan	Schématisation dans l'espace	Torseur cinématique $\{V_{2/1}\}$	Torseur statique $\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\}$
Encastrement			$\{0\}$	$\begin{Bmatrix} X.\vec{x} + Y.\vec{y} + Z.\vec{z} \\ L.\vec{x} + M.\vec{y} + N.\vec{z} \end{Bmatrix}$
Pivot d'axe (O, \vec{x})			$\forall P \in (O, \vec{x}) \begin{Bmatrix} p.\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$	$\forall P \in (O, \vec{x}) \begin{Bmatrix} X.\vec{x} + Y.\vec{y} + Z.\vec{z} \\ M.\vec{y} + N.\vec{z} \end{Bmatrix}$
Glissière de direction \vec{x}			$\forall P \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ u.\vec{x} \end{Bmatrix}$	$\forall P \begin{Bmatrix} Y.\vec{y} + Z.\vec{z} \\ L.\vec{x} + M.\vec{y} + N.\vec{z} \end{Bmatrix}$
Hélicoïdale d'axe (O, \vec{x})			$\forall P \in (O, \vec{x}) \begin{Bmatrix} p.\vec{x} \\ u.\vec{x} \end{Bmatrix}$ avec p et u liés par la relation $u = \frac{pas}{2\pi} p$	$\forall P \in (O, \vec{x}) \begin{Bmatrix} X.\vec{x} + Y.\vec{y} + Z.\vec{z} \\ L.\vec{x} + M.\vec{y} + N.\vec{z} \end{Bmatrix}$ avec p et u liés par la relation $L = \frac{pas}{2\pi} X$ si rendement 100%
Pivot glissant d'axe (O, \vec{x})			$\forall P \in (O, \vec{x}) \begin{Bmatrix} p.\vec{x} \\ u.\vec{x} \end{Bmatrix}$	$\forall P \in (O, \vec{x}) \begin{Bmatrix} Y.\vec{y} + Z.\vec{z} \\ M.\vec{y} + N.\vec{z} \end{Bmatrix}$
Sphérique à doigt d'axes (O, \vec{y}) et (O, \vec{z})			$\begin{Bmatrix} q.\vec{y} + r.\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X.\vec{x} + Y.\vec{y} + Z.\vec{z} \\ L.\vec{x} \end{Bmatrix}$
Rotule (ou sphérique) de centre O			$\begin{Bmatrix} p.\vec{x} + q.\vec{y} + r.\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X.\vec{x} + Y.\vec{y} + Z.\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$
Appui-plan de normale \vec{z}			$\forall P \begin{Bmatrix} r.\vec{z} \\ u.\vec{x} + v.\vec{y} \end{Bmatrix}$	$\forall P \begin{Bmatrix} Z.\vec{z} \\ L.\vec{x} + M.\vec{y} \end{Bmatrix}$
Linéaire rectiligne (ou cylindre-plan) de normale \vec{z} et d'axe (O, \vec{y})			$\forall P \in (O, \vec{y}, \vec{z}) \begin{Bmatrix} q.\vec{y} + r.\vec{z} \\ u.\vec{x} + v.\vec{y} \end{Bmatrix}$	$\forall P \in (O, \vec{y}, \vec{z}) \begin{Bmatrix} Z.\vec{z} \\ L.\vec{x} \end{Bmatrix}$
Linéaire annulaire (ou sphère-cylindre) de centre O et d'axe (O, \vec{x})			$\begin{Bmatrix} p.\vec{x} + q.\vec{y} + r.\vec{z} \\ u.\vec{x} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} Y.\vec{y} + Z.\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$
Ponctuelle (ou sphère-plan) de contact O et de normale \vec{z}			$\forall P \in (O, \vec{z}) \begin{Bmatrix} p.\vec{x} + q.\vec{y} + r.\vec{z} \\ u.\vec{x} + v.\vec{y} \end{Bmatrix}$	$\forall P \in (O, \vec{z}) \begin{Bmatrix} Z.\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

4 Une action mécanique à distance particulière : la pesanteur

4.1 Définition

4.1.1 Modèle local

La pesanteur est l'action mécanique exercée par la Terre sur tout corps placé dans son champ de gravitation. C'est une action mécanique à distance, qui peut être modélisée par une action mécanique élémentaire s'exerçant sur un volume élémentaire dV centré autour de M et de masse volumique $\rho(M)$:

Définition :

Le système est dit homogène si la masse volumique ρ ne dépend pas du point considéré M et est donc constante dans le système matériel.

4.1.2 Modèle global

Le torseur d'action mécanique exercée par la pesanteur sur le système matériel S de volume V s'écrit alors :

4.2 Masse, Poids et Centre de Gravité

4.2.1 Masse

On appelle masse du système le nombre :



Remarque

Si $\rho = \text{cste}$, on retrouve la formule connue $M = \rho \cdot V$

4.2.2 Poids

On appelle poids du système la résultante de l'action mécanique de pesanteur, soit :



Remarque

Dans le cas où l'accélération de la pesanteur, g , est constante, on a :

$$\vec{P}(S) = g \cdot \vec{z} \iiint_V -\rho(M) \cdot dV$$



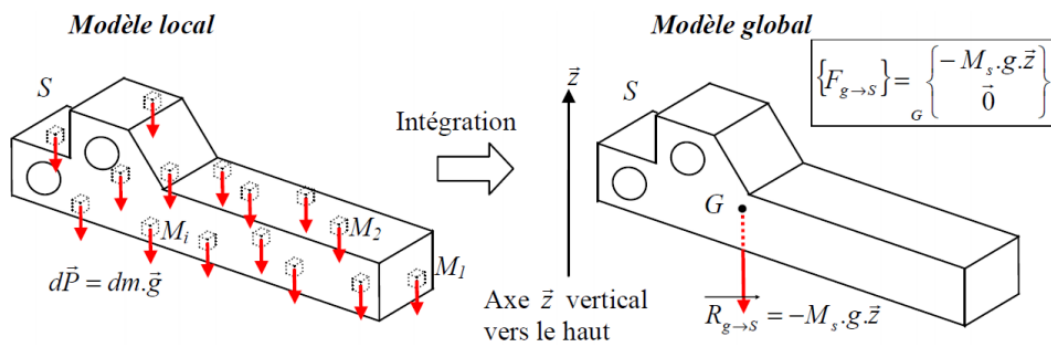
D'où la formule connue $\overrightarrow{P}(S) = -M_S \cdot g \cdot \vec{z}$

4.2.3 Centre de gravité

On peut montrer qu'il existe un point G unique, appelé centre de gravité du système étudié.

En G , le torseur de l'action mécanique sur le système S est un glisseur et s'écrit donc :

Exemple : Application à la pince de robot



4.2.4 Propriétés du centre de gravité

- Détermination pratique

On peut montrer que la position du point G est définie par : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M_S} \cdot \iiint_V \overrightarrow{OM} \cdot dm$

Si on note les coordonnées de G dans le repère par x_G, y_G, z_G , on a alors :

$$x_g = \frac{1}{M_S} \iiint_V x \cdot dm$$

$$y_g = \frac{1}{M_S} \iiint_V y \cdot dm$$

$$z_g = \frac{1}{M_S} \iiint_V z \cdot dm$$

Si le solide est homogène ($\rho = \text{cste}$), on peut sortir le ρ de toutes les intégrales précédentes pour obtenir :

$$x_g = \frac{1}{V} \iiint_V x \cdot dV$$

$$y_g = \frac{1}{V} \iiint_V y \cdot dV$$

$$z_g = \frac{1}{V} \iiint_V z \cdot dV$$

Remarque

Dans le cas de plusieurs solides S_i homogènes de centres de gravité G_i de masses m_i , alors la position du centre de gravité G de l'ensemble de ces S_i solides est donnée par :

$$\vec{OG} = \frac{1}{\sum_i m_i} \sum_i m_i \cdot \vec{OG}_i$$

Par exemple dans le cas de 3 solides :

$$\vec{OG} = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} (m_1 \cdot \vec{OG}_1 + m_2 \cdot \vec{OG}_2 + m_3 \cdot \vec{OG}_3)$$

- Symétries

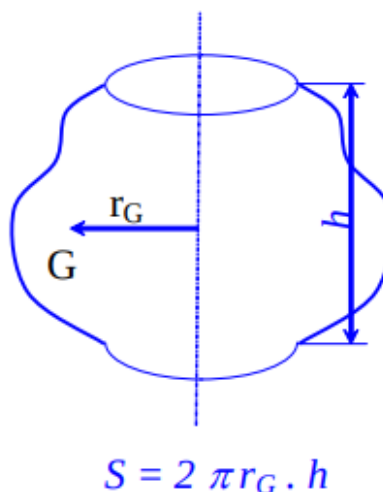
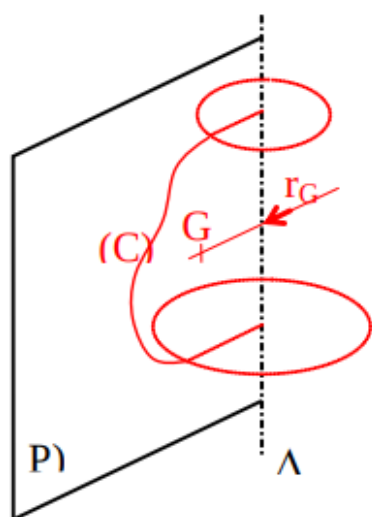
Si le système est homogène et présente un élément de symétrie géométrique (point, axe ou plan), alors le centre de gravité appartient à cet élément.

4.2.5 Théorèmes de Guldin

Ces deux théorèmes permettent de déterminer rapidement la position (le plus souvent la coordonnée radiale) du centre de gravité d'un solide.

Premier théorème

L'aire de la surface engendrée par une courbe plane tournant autour d'un axe de son plan ne la coupant pas est égale au produit de la longueur de la courbe supposée homogène par le périmètre du cercle décrit par son centre de gravité.



Deuxième théorème

Le volume engendré par une surface plane tournant autour d'un axe de son plan ne la coupant pas est égal au produit de l'aire de la surface, supposée homogène, par le périmètre du cercle décrit par son centre de gravité.

