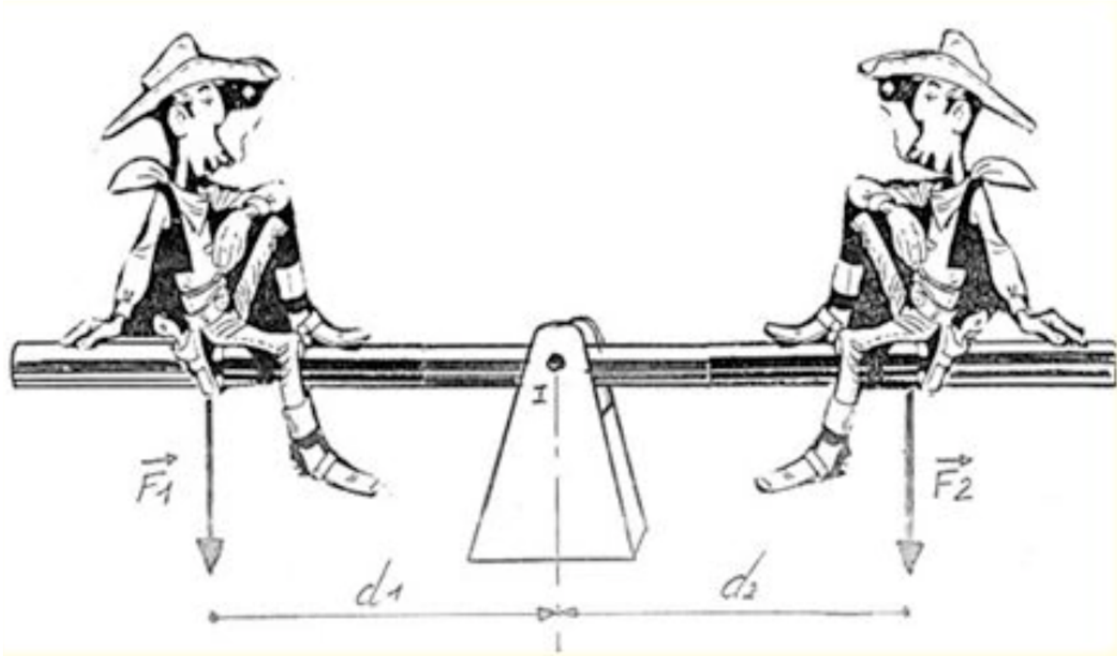
Principe Fondamental de la Statique

Cours

Séquence 11 - Statique du solide

v1

Lycée Jean Zay – 21 rue Jean Zay – 63300 Thiers – Académie de Clermont-Ferrand



Compétences visées:

B2-16	Modéliser une action mécanique.
C1-05	Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.

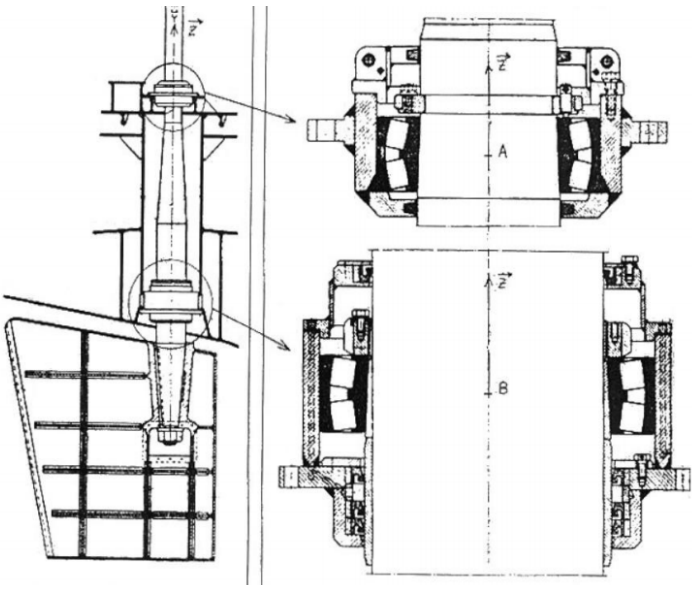
Table des matières

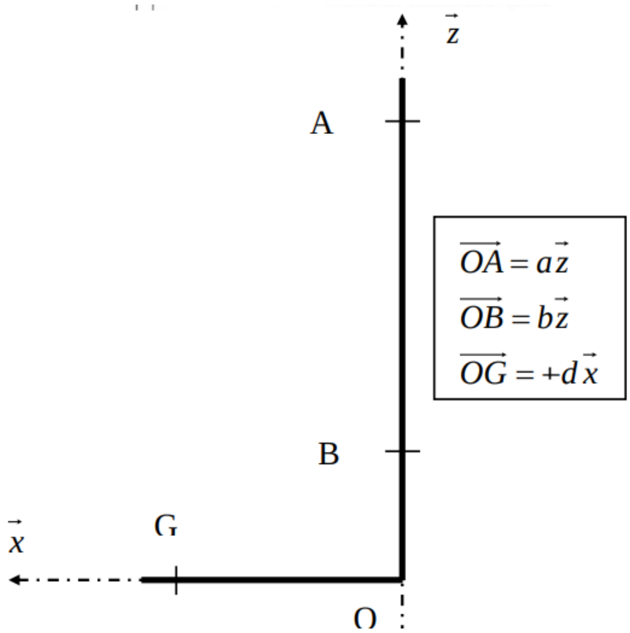
Support d'application - Arbre de commande d'un gouvernail de bateau

Présentation La liaison pivot entre un gouvernail et la coque d'un navire est définie par les dessins (origine constructeur) ci-dessous.

Elle est réalisée à l'aide de deux boîtiers de roulements :

- Le roulement supérieur est un roulement à rouleaux à rotule immobilisé axialement, réalisant une liaison rotule de centre A entre le gouvernail et la coque.
- Le roulement inférieur est un roulement de même type mais non immobilisé axialement, réalisant donc une liaison linéaire annulaire de centre B, d'axe , entre le gouvernail et la coque.





Objectif

- Déterminer les actions mécaniques dans les deux liaisons en A et B, dont la connaissance permettra le dimensionnement des roulements
- Déterminer le couple à exercer par la commande pour vaincre l'effort de l'eau

Hypothèses

- L'action de la pesanteur sur le gouvernail se réduit à une force passant par le point G, centre de gravité, de résultante
- L'action de l'eau sur le safran est supposée se réduire à une force passant par G, de résultante
- L'action de commande sur le gouvernail est un couple de moment

Données numériques

$P = 25$ daN $\quad F = 300$ daN $\quad d = 0,5$ m $\quad a = 2,5$ m $\quad b = 1$ m

1 Isolement d'un système

L'**isolement** consiste à définir une frontière fictive qui englobe tout le système isolé E que l'on cherche à étudier. Cette frontière fictive permet d'identifier un milieu intérieur au système isolé et un milieu extérieur $\overline{E}$ au système isolé.

Le système isolé pourra être un solide, une portion de solide, un ensemble de solides, le mécanisme entier...

Remarque

On isole jamais le bâti !

2 Bilan des actions mécaniques extérieures sur le système isolé

On appelle actions mécaniques extérieures sur l'ensemble isolé, toutes les actions exercées par un élément (solide, fluide, ressort...) n'appartenant pas au système isolé SUR un élément du système isolé.

On appelle actions mécaniques intérieures à l'ensemble isolé, toutes les actions exercées par un élément (solide, fluide, ressort...) du système isolé SUR un autre élément du système isolé.

Remarque

Les actions mécaniques intérieures au système isolé ne seront pas prises en compte dans l'application du Principe Fondamental de la Statique.

On utilise le graphe de structure pour déterminer rapidement le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (« BAME ») au système isolé. Pour cela, on inventorie :

- Les actions mécaniques à distance qui s'appliquent sur les sous-ensembles du système isolé (généralement la pesanteur si on ne la néglige pas devant les autres actions mécaniques)
- Les actions mécaniques de contact en analysant ce qui se passe aux contacts des ensembles matériels environnant le système isolé, avec les sous-ensembles du système isolé.

Exemple : *Application sur le gouvernail*

On donne le graphe de structure ci-dessous du mécanisme :

A partir de ce graphe de structure, on décide d'isoler le gouvernail **1**
On fait ensuite le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures qui s'exercent sur le système isolé (ici le gouvernail **1**) :

- Actions à distance :

- Actions de contact :

3 Principe fondamental de la statique

3.1 Repère galiléen

En SII, on appelle repère galiléen :

- Tout repère **fixe** (sans mouvement) par rapport à la Terre
- Ou tout repère en mouvement de **translation rectiligne** (sa trajectoire est un segment) et **uniforme** (sa vitesse est constante) par rapport à la Terre

3.2 Equilibre

Un système E est en équilibre dans un référentiel Galiléen si, au cours du temps, chaque point de E conserve la même position par rapport au repère géométrique du référentiel.

3.3 Énoncé du Principe Fondamental de la Statique

Pour qu'un ensemble matériel $\underline{\mathbf{e}}$ soit en mouvement uniforme ou au repos dans un référentiel galiléen, il faut que la somme des torseurs associés aux actions mécaniques extérieures à $\underline{\mathbf{e}}$ soit égale au torseur nul. On note alors :

Lorsque l'on somme des torseurs ces derniers doivent tous être écrits au même point !

Exemple : *Application sur le gouvernail*

Ecrivons le PFS appliqué au gouvernail $\underline{\mathbf{1}}$ sous la forme d'une égalité de torseurs :

Remarque

L'énoncé de ce principe est vérifié pour des solides au repos ou pour des mouvements effectués sans accélération (mouvement rectiligne uniforme).

Remarque

On pourra étendre ce principe pour un solide de masse supposée nulle en mouvement quelconque dans un référentiel galiléen (les forces d'inertie sont alors nulles, on est alors dans un cas particulier du Principe Fondamental de la Dynamique).

Remarque

Pour la plupart des mécanismes étudiés en laboratoire, un repère lié à la Terre constitue une bonne approximation d'un repère galiléen. Un repère galiléen est un repère dans lequel on peut vérifier le principe fondamental de la statique avec une bonne précision.

Remarque

Attention à ne considérer que les forces extérieures agissant sur le système isolé (les forces intérieures ne sont pas à prendre en compte).

3.4 Théorèmes généraux

L'énoncé du PFS conduit à l'écriture de deux équations vectorielles donnant lieux aux deux théorèmes suivants :

Définition *Théorème de la résultante statique*

Pour tout sous ensemble matériel **e** de l'ensemble matériel **E** en équilibre par rapport à un repère galiléen, la résultante générale du torseur associé aux actions mécaniques extérieures à **e** est nulle. text

Définition *Théorème du moment statique*

Pour tout sous ensemble matériel **e** de l'ensemble matériel **E** en équilibre par rapport au repère galiléen Rg, le moment résultant du torseur associé aux actions mécaniques extérieures à **e** est nul en tout point. text

Exemple : *Application sur le gouvernail*

Ecrire le PFS appliqué au gouvernail **1** sous la forme de 2 équations vectorielles :

$$\{\tau_{pes\rightarrow 1}\} + \{\tau_{eau\rightarrow 1}\} + \{\tau_{commande\rightarrow 1}\} + \{\tau_{L_A\rightarrow 1}\} + \{\tau_{L_B\rightarrow 1}\} = \{0\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{R_{pes\rightarrow 1}} + \overrightarrow{R_{eau\rightarrow 1}} + \overrightarrow{R_{commande\rightarrow 1}} + \overrightarrow{R_{L_A\rightarrow 1}} + \overrightarrow{R_{L_B\rightarrow 1}} & = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{M_{A_{pes\rightarrow 1}}} + \overrightarrow{M_{A_{eau\rightarrow 1}}} + \overrightarrow{M_{A_{commande\rightarrow 1}}} + \overrightarrow{M_{A_{L_A\rightarrow 1}}} + \overrightarrow{M_{A_{L_B\rightarrow 1}}} & = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

Remarque

Ces 2 équations vectorielles permettent d'obtenir 2*3=6 équations scalaires en projetant les 2 équations vectorielles dans une base à définir.

3.5 Résolution analytique

Exemple : *Application sur le gouvernail*

Appliquons le Principe Fondamental de la Statique au gouvernail 1 pour déterminer les actions mécaniques dans les roulements ainsi que le couple C.

Commençons par écrire tous les torseurs au même point : on choisit le point A.

Par exemple, pour le torseur $\{\tau_{pes\to 1}\}$:

On a : $\{\tau_{pesanteur\to 1}\} = {}_G\begin{Bmatrix} -P\cdot\overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{Bmatrix}$

Or :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{A_{pes\to 1}}} &= \overrightarrow{M_{G_{pes\to 1}}} + \overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{R_{pes\to 1}} \\ &= \overrightarrow{0} + \left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OG}\right)\wedge(-P\cdot\overrightarrow{z}) \\ &= (-a\cdot\overrightarrow{z}+d\cdot\overrightarrow{x})\wedge(-P\cdot\overrightarrow{z}) \\ &= d\cdot P\cdot\overrightarrow{y} \end{aligned}$$

D'où : $\{\tau_{pesanteur\to 1}\} = {}_G\begin{Bmatrix} -P\cdot\overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} -P\cdot\overrightarrow{z} \\ d\cdot P\cdot\overrightarrow{y} \end{Bmatrix}$

Finalement, après déplacement de tous les torseurs en A, on obtient :

On applique alors le PFS (Principe Fondamental de la Statique) au solide 1 en A :

On résout alors ce système de 6 équations à 6 inconnues, et on trouve :

L'application numérique nous donne les résultats suivants pour $P = 50\,daN$, $F = 100\,daN$, $d = 0,5\,m$, $a = 2,5\,m$, $b = 1.5\,m$:

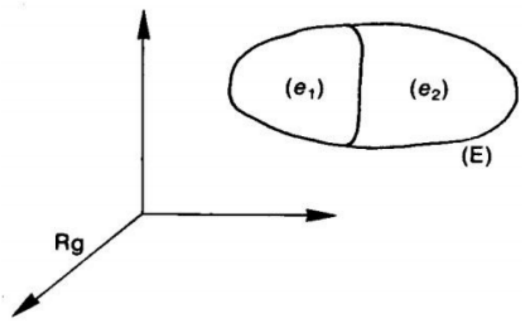
$$C = 500\,N \cdot m \quad X_A = 125\,N \quad Y_A = 750\,N$$

$$X_B = -125\,N \quad Y_B = -1250\,N \quad Z_A = 500N$$

4 Application du PFS

4.1 Théorème des actions réciproques

Soit $\underline{\mathbf{E}}$ un ensemble matériel en équilibre par rapport un repère galiléen Rg. Soit une partition de $\underline{\mathbf{E}}$ en deux sous-ensembles matériels $\underline{\mathbf{e_1}}$ et $\underline{\mathbf{e_2}}$.



Appliquons le principe fondamental de la statique à $\underline{\mathbf{e_1}}$:

$$\{\tau_{\bar{e_1} \rightarrow e_1}\} = \{0\}$$

or $\bar{e_1} = \{\bar{E}, e_2\}$ donc

$$\{\tau_{\bar{E} \rightarrow e_1}\} + \{\tau_{e_2 \rightarrow e_1}\} = \{0\} \tag{1}$$

de même si on applique le principe fondamental de la statique à $\underline{\mathbf{e_2}}$ on a :

$$\{\tau_{\bar{E} \rightarrow e_2}\} + \{\tau_{e_1 \rightarrow e_2}\} = \{0\} \tag{2}$$

(1)+(2) donne :

$$\{\tau_{\bar{E} \rightarrow e_1}\} + \{\tau_{e_2 \rightarrow e_1}\} + \{\tau_{\bar{E} \rightarrow e_2}\} + \{\tau_{e_1 \rightarrow e_2}\} = \{0\}$$
$$\{\tau_{\bar{E} \rightarrow E}\} + \{\tau_{e_2 \rightarrow e_1}\} + \{\tau_{e_1 \rightarrow e_2}\} = \{0\}$$

on applique le principe fondamental de la statique à **E** on obtient :

$$\{\tau_{\bar{E}\to E}\} = \{0\}$$

donc : $\{\tau_{e_2\to e_1}\} + \{\tau_{e_1\to e_2}\} = \{0\}$

finalement :

$$\{\tau_{e_2\to e_1}\} = -\{\tau_{e_1\to e_2}\}$$

Définition *Théorème des actions réciproques*

L'action mécanique du sous-ensemble **e₂** sur le sous ensemble matériel **e₁** est opposée à l'action mécanique de **e₁** sur **e₂**.

$$\{\tau_{e_2\to e_1}\} = -\{\tau_{e_1\to e_2}\}$$

Exemple : *Application sur le gouvernail*

Utilisons ce théorème pour exploiter les résultats numériques précédents pour déterminer l'effort radial maximal sur chacun des roulements en A et B, ce qui permettra de les dimensionner.
La valeur maximale de l'effort radial sur le roulement en A sera donc égale à :

$$F_A = \sqrt{(-X_A)^2 + (-Y_A)^2}$$

A.N : $F_A = 760\,N$
De même sur le roulement en B :

$$F_B = \sqrt{(-X_B)^2 + (-Y_B)^2}$$

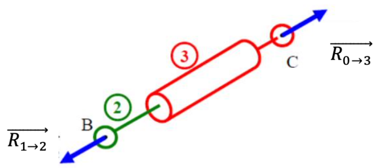
A.N : $F_B = 1256\,N$
Ces résultats permettraient de dimensionner les roulements.

4.2 Cas particulier d'un système matériel E soumis à 2 forces

Si un système matériel en équilibre subit l'action unique de 2 forces alors ces forces ont même norme et sont directement opposées.

Exemple :
Vérin linéaire :

L'ensemble **2**+**3** (vérin) est soumis à 2 forces. Ces deux forces ont donc même norme et sont directement opposées.



4.3 Cas particulier des problèmes plan

Certains cas fréquemment rencontrés concernent les systèmes en équilibre sous l'effet d'actions mécaniques dont les résultantes sont coplanaires et les moments éventuels perpendiculaires à ce plan. Ces systèmes sont qualifiés de systèmes plans.

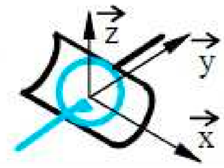
Dans le cas d'un problème plan, l'application du PFS ne peut fournir au maximum que 3 équations scalaires (2 équations issues du théorème de la résultante statique projetée sur les 2 axes de la base appartenant au plan

+ 1 équation issue du théorème du moment statique projetée sur le 3ème axe de la base perpendiculaire au plan).

Dans un problème plan, le torseur des actions mécaniques transmissibles possède forcement 3 composantes nulles.

Exemple :

Si on considère une liaison linéaire annulaire d'axe $(O,\overrightarrow{x})$ entre 2 solides 1 et 2, la forme générale du torseur d'action mécanique transmissible dans le cas tri-dimensionnel est $\{\mathcal{T}_{1\to2}\}=_{(0,\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}\left\{ 0 \quad Y_{12} \right\}_{Z_{12}}$ 000 Si le problème est plan alors certains termes du torseur non nuls dans le cas tridimensionnel deviennent nécessairement nuls.



Simplifications d'une liaison linéaire annulaire dans le cas d'un problème plan :

Problème de plan $(0,\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})$

$$\{\mathcal{T}_{1\to2}\}=_{(0,\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}\left\{\begin{array}{cc} 0 & - \\ Y_{12} & - \\ - & 0 \end{array}\right\}$$

Problème de plan $(0,\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})$

$$\{\mathcal{T}_{1\to2}\}=_{(0,\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}\left\{\begin{array}{cc} - & 0 \\ Y_{12} & - \\ Z_{12} & - \end{array}\right\}$$

Problème de plan $(0,\overrightarrow{x},\overrightarrow{z})$

$$\{\mathcal{T}_{1\to2}\}=_{(0,\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})}\left\{\begin{array}{cc} 0 & - \\ - & 0 \\ Z_{12} & - \end{array}\right\}$$

Ce type de raisonnement se généralise à tous les torseurs d'actions mécaniques transmissibles des liaisons normalisées et permet ainsi de minimiser le nombre d'inconnues statiques.

5 Méthode générale de résolution analytique pour des problèmes de statique

Étape 1 On réalise un graphe de structure.

Étape 2 On réalise un bilan complet des actions mécaniques et on complète le graphe de structure en y faisant apparaitre les actions mécaniques extérieur au système.

Étape 3 On identifie (s'il y en a) les sous-systèmes soumis à l'action unique de deux actions mécaniques ce qui permet d'identifier à chaque fois une direction et de supprimer des composantes d'actions mécaniques inconnues.

On utilise le Principe Fondamental de la Statique. Deux méthodes sont possibles et doivent être choi- sies en fonction de l'objectif d'étude :

Objectif d'étude 1 : On cherche toutes les inconnues d'une liaison	**Objectif d'étude 2 : On cherche une équation reliant une inconnue aux données**
Étape 4 On cherche une frontière d'isolement faisant apparaître les inconnues recherchées ainsi que des données connues tout en limitant le nombre d'inconnues non recherchées. On dresse le bilan des actions mécaniques extérieures au système isolé (on donne les torseurs d'actions mécaniques aux points les plus simples).	**Étape 4** On cherche une frontière d'isolement faisant apparaître l'inconnue recherchée, les don- nées et limitant le nombre d'inconnues non recherchées. On dresse le bilan des actions mécaniques extérieures au système isolé (on donne les torseurs d'actions mécaniques aux points les plus simples).
Étape 5 On écrit le PFS en déplaçant tous les torseurs au même point (choisir, parmi les différents points disponibles pour les torseurs, celui qui demande le moins de changements de points).	**Étape 5** En observant les torseurs d'actions mécaniques extérieures inconnues non recherchées, on choisit le théorème à appliquer (résutante ou moment) et on projette sur un axe ne faisant pas intervenir ces inconnues. On obtient une équation scalaire.
Étape 6 Si le nombre d'inconnues $I_s \leq 6$ on peut résoudre, sinon on écrit les 6 équations obtenues et on cherche un nouvel isolement faisant intervenir à nouveau les inconnues recherchées ou celles apparues.	**Étape 6** S'il reste des inconnues inutiles,on recherche un autre isolement ou une autre équation permettant de résoudre en utilisant la même règle.
Étape 7 On résout littéralement le(s) système(s) d'équations.	**Étape 7** On résout littéralement le(s) système(s) d'équations.
Étape 8 On effectue les applications numériques et on valide ou non le critère de performance attendu.	**Étape 8** On effectue les applications numériques et on valide ou non le critère de performance attendu.