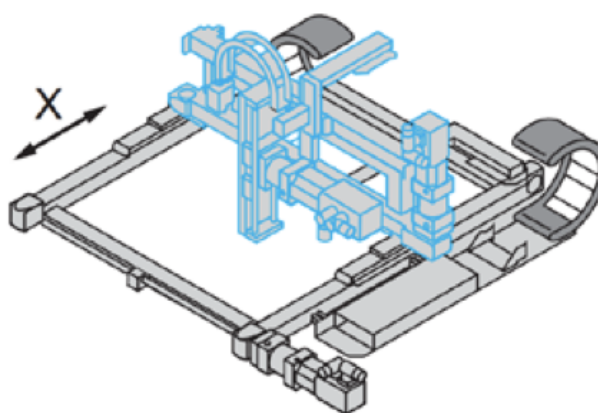


SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS ET INVARIANTS

MODÉLISATION DU COMPORTEMENT DES SLCI



Compétences visées:

- A3-12** Identifier la structure d'un système asservi.
- B2-04** Établir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert.
- B2-07** Modéliser un système par schéma-blocs.

Table des matières

1	Équations modélisant le comportement des systèmes	4
1.1	Intérêts de la modélisation du comportement des systèmes	4
1.2	Exemples d'équations modélisant le comportement d'un système	5
2	Transformée de Laplace	7
2.1	Définition	7
2.2	Existence et unicité	7
2.3	Intérêt	7
2.4	Propriétés	8
2.5	Transformées de Laplace usuelles	9
3	Fonction de transfert	9
3.1	Définition de la fonction de transfert	9
3.2	Caractéristiques d'une fonction de transfert	11
3.2.1	Pôles et zéros d'une fonction de transfert	11
3.2.2	Ordre et classe d'une fonction de transfert	12
4	Représentation par schémas-blocs	12
4.1	Représentation par schéma-bloc d'une fonction de transfert	12
4.2	Représentation par schéma-bloc d'un système complexe	13
4.3	Simplification des schémas-blocs	14

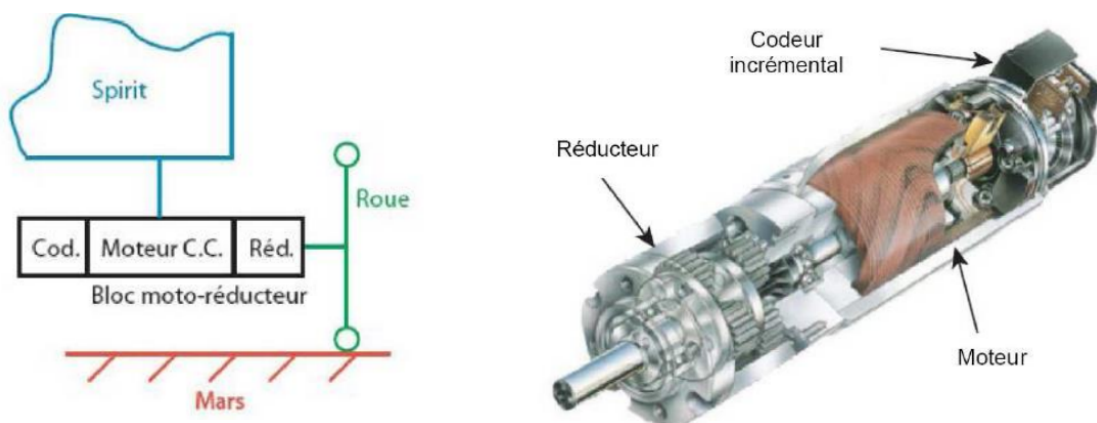
Support d'application : Robot martien « Spirit »

La mission Mars Exploration Rover est une mission spatiale confiée à la NASA. Elle a pour but d'explorer les sols de la planète Mars pour y rechercher la présence ancienne et prolongée d'eau.

Cette exploration est réalisée grâce à deux rovers automatiques lancés depuis Cap Canaveral. Le premier rover se nomme robot Spirit. Il a été lancé le 10 juin 2003 et s'est posé le 3 janvier 2004 dans le cratère Gusev.

Le second rover se nomme robot Opportunity, il a été lancé le 8 juillet 2003 et s'est posé le 24 janvier 2004 sur Meridiani Planum.

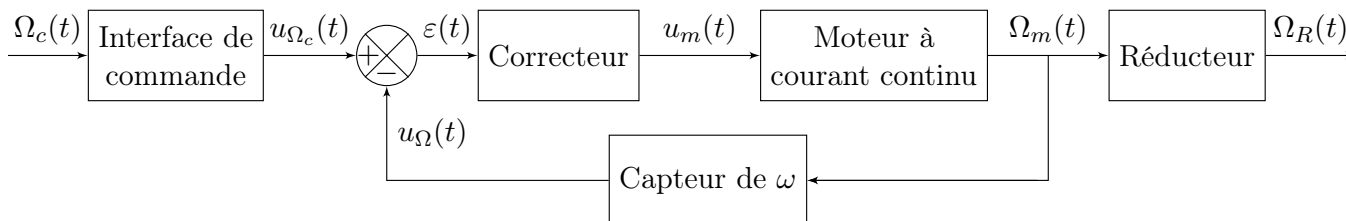
Pour faire avancer le robot, les six roues de Spirit sont équipées chacune d'un bloc d'entraînement d'une roue (constitué d'un moteur, qui génère un mouvement de rotation, d'un réducteur, qui réduit la vitesse de rotation du moteur par des engrenages afin de faire tourner les roues, et d'un codeur incrémental qui permet de mesurer la rotation du moteur).



Les performances annoncées de la part du constructeur sont les suivantes :

Critère	Valeur
Vitesse de déplacement	1 km en moins de 2 heures
Pente du sol	+/- 30°
Temps de réponse à 5%	<200 ms

Le comportement du bloc motoréducteur et de sa commande peut être modélisé par le schéma-bloc ci-dessous :



Objectif

Modéliser le comportement de la commande des roues pour vérifier les performances annoncées

Préambule :

Les propriétés évoquées dans ce cours ne s'appliquent qu'aux systèmes linéaires continus et invariants (cf cours précédent sur la caractérisation des performances des systèmes).

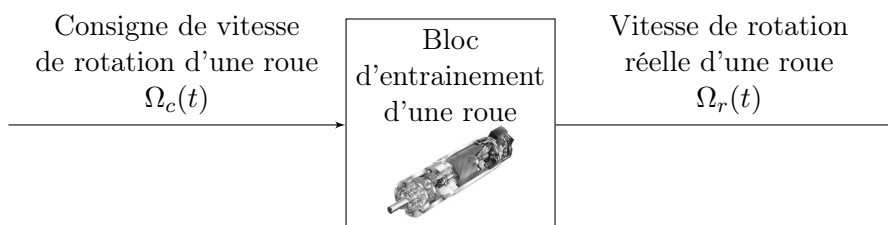
1 Équations modélisant le comportement des systèmes

1.1 Intérêts de la modélisation du comportement des systèmes

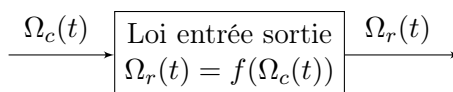
On a vu dans le cours précédent, que, pour répondre correctement au besoin pour lequel il a été conçu, un système doit « produire » une réponse (souvent appelée sortie du système) qui respecte au mieux la consigne (souvent appelée entrée du système).

Ces deux grandeurs sont liées entre elles par une loi « entrée-sortie » physique, traduite par une équation mathématique plus ou moins complexe, qui est le modèle du système.

Exemple : Application au robot martien Spirit



Modèle associé :



On parlera de modèle de connaissance lorsque le modèle est déterminé théoriquement à l'aide d'équations de la physique, et de modèle de comportement lorsque ce dernier est déterminé expérimentalement.

Étant donné que le modèle traduit la relation entre l'entrée et la sortie, la connaissance de deux d'entre eux doit permettre la détermination du troisième. L'étude des systèmes continus peut donc conduire à rencontrer 3 types de problèmes :



	$e(t)$	modèle	$s(t)$	Description
COMMANDE	?	connu	connue	On cherche à déterminer quelle doit être l'entrée pour un fonctionnement voulu.
PRÉDICTION	connue	connu	?	On cherche à anticiper le comportement du système vis à vis d'une certaine entrée.
IDENTIFICATION	connue	?	connue	On cherche à déterminer expérimentalement le modèle du système.

1.2 Exemples d'équations modélisant le comportement d'un système

L'étude des systèmes linéaires continus et invariants revient donc à étudier la relation entre l'évolution temporelle de la sortie $s(t)$ du système en fonction de celle de l'entrée $e(t)$ et/ou de celle d'une perturbation $p(t)$.

Dans la grande majorité des cas, le modèle de connaissance du système est alors une équation différentielle à coefficients constants de la forme.

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

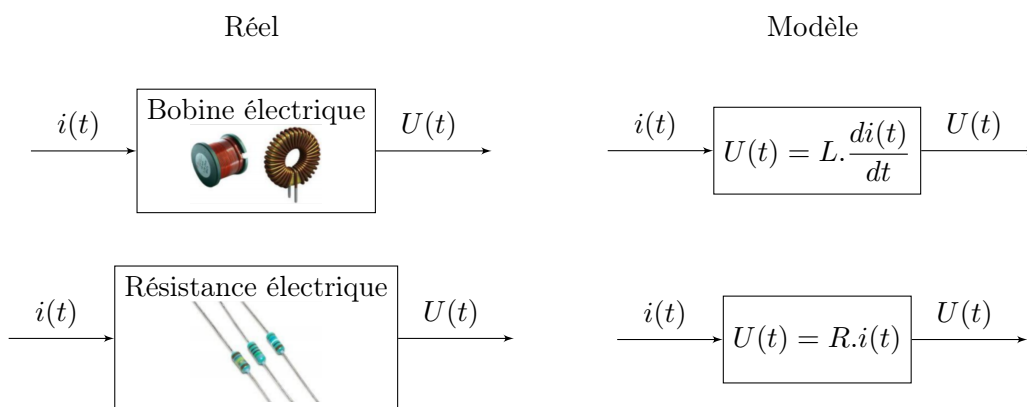
n est l'ordre du système

Le principe de causalité vérifié par tout système physique réel impose d'avoir $n \geq m$.

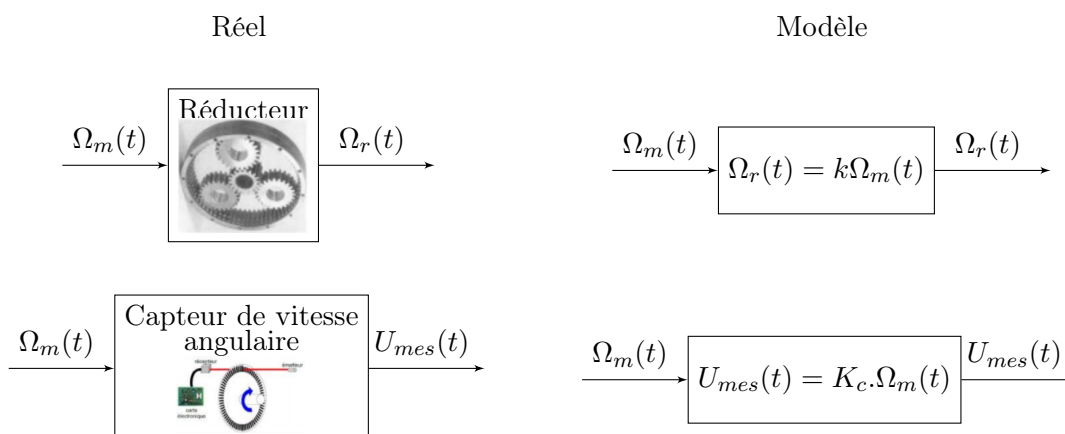
Pour information, le principe de causalité s'énonce en deux points fondamentaux :

- tout phénomène a une cause
- dans les mêmes conditions, la même cause est suivie du même effet.

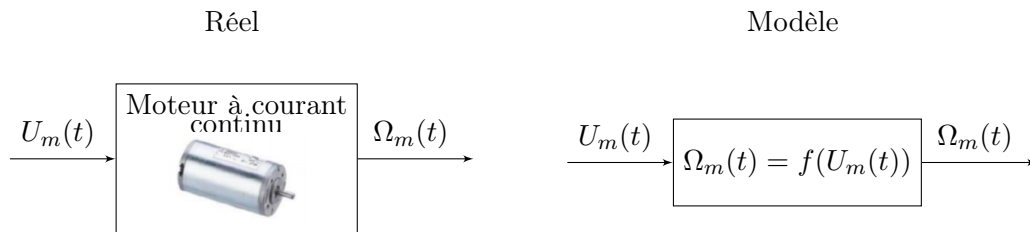
Exemple : Exemples électriques usuels



Exemple : Application au robot martien spirit



Dans certains cas, il est plus difficile de déterminer la loi « entrée-sortie » d'un système. Par exemple, c'est le cas du moteur à courant continu utilisé dans le bloc moto-réducteur :



On cherche la loi entrée sortie $\Omega_m(t) = f(t, U_m(t))$ à partir des équations physiques régissant le fonctionnement d'un moteur à courant continu :

Équation électrique du moteur

$$u(t) = e(t) + R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Avec :

- $u(t)$ la tension de commande du moteur [V]
- $e(t)$ la f.e.m. induite [V]
- R la résistance d'induit [Ω]
- $i(t)$ le courant d'induit [A]
- L l'inductance de l'induit [H]

Équation mécanique du moteur

$$C_m(t) - C_r(t) = J \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} + f\omega(t)$$

Avec :

- $C_m(t)$ le couple moteur [N.m]
- $C_r(t)$ le couple résistant [N.m]
- $\omega_m(t)$ la vitesse de rotation du moteur [rad/s]
- J le moment d'inertie du moteur [kg.m²]
- f le coefficient de frottement visqueux [N.m/rad/s]

Équations de couplage

$$\begin{aligned} e(t) &= K\omega(t) \\ C_m(t) &= Ki(t) \end{aligned}$$

Avec :

- $K_e(t)$ constante de vitesse [V/rad/s]
- $K_t(t)$ constante de couple [N.m/A]

L'obtention dans le domaine temporel d'une relation directe donnant $\Omega_m(t)$ en fonction de t et $U_m(t)$ serait mathématiquement possible avec des résolutions classiques d'équations différentielles mais assez long.

Il est donc intéressant d'introduire d'autres outils permettant d'effectuer rapidement et efficacement les études systématiques auxquelles nous allons être confrontés : l'outil le plus efficace dans les cas que nous étudierons est la transformée de Laplace.

2 Transformée de Laplace

2.1 Définition

 **Définition** *Transformée de Laplace*

La transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ causale, telle que $f(t) = 0$ pour $t < 0$ est :

$$f(t) \longrightarrow L(f(t)) = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad \text{avec } p \text{ complexe}$$

Cette transformation permet de passer du domaine temporel (variable t) dans le domaine de Laplace (variable p). Ce qui permet notamment de simplifier la résolution des équations différentielles.

La transformation inverse faisant appel à des notions mathématiques hors programme, s'effectuera à l'aide d'un tableau de fonctions usuelles.

Pour rendre la fonction $f(t)$ causale (c'est à dire que $f(t) = 0$ pour $t < 0$), on la multiplie par la fonction de Heavyside $u(t)$ définie précédemment par :

$$\begin{cases} u(t) = 0 & \text{si } t \leq 0 \\ u(t) = 1 & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ainsi, quelle que soit la fonction $f(t)$, on a $f(t) \cdot u(t)$ qui est causale.

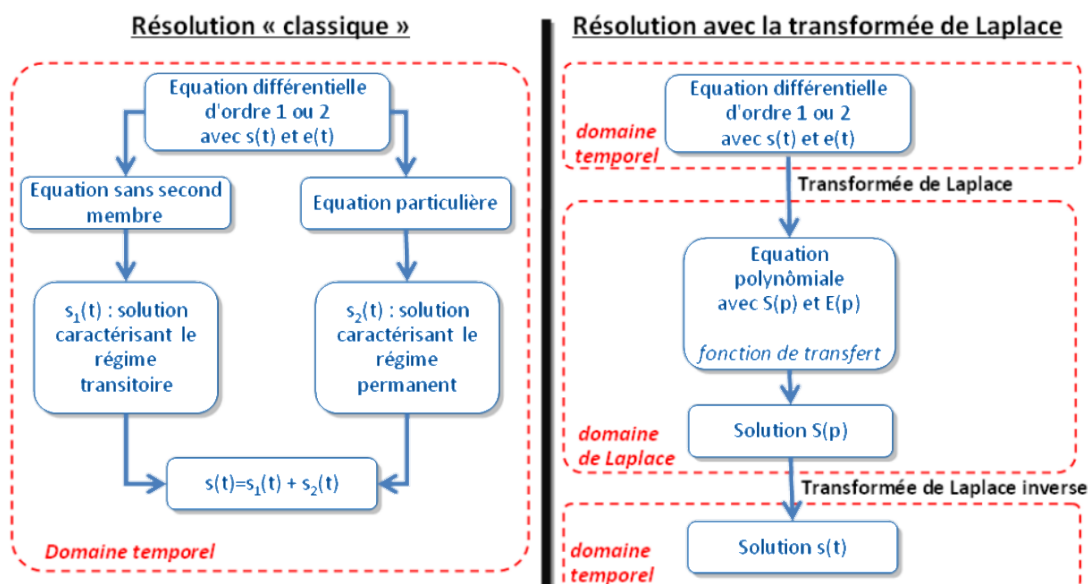
2.2 Existence et unicité

La transformée de Laplace existe si $f(t)$ est intégrable.

Si elle existe cette transformée est unique, c'est à dire qu'à $f(t)$ correspond $F(p)$ unique et à $F(p)$ correspond $f(t)$ unique.

2.3 Intérêt

La transformation de Laplace permet de transformer les équations différentielles en polynômes et de faciliter ainsi l'étude du comportement des SLCI.



2.4 Propriétés

Propriété *Linéarité*

$$\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2, \quad L(af_1(t) + bf_2(t)) = aL(f_1(t)) + bL(f_2(t))$$

Propriété *Dérivation*

$$L(f'(t)) = pL(f(t)) - f(0^+)$$

$$L(f''(t)) = p^2L(f(t)) - pf(0^+) - f'(0^+)$$

Avec des conditions initiales nulles, une dérivation dans le domaine temporel revient à une multiplication par p dans le domaine symbolique de Laplace.

Propriété *Intégration*

Notons $g(t)$ la fonction telle que $g'(t) = f(t)$, alors

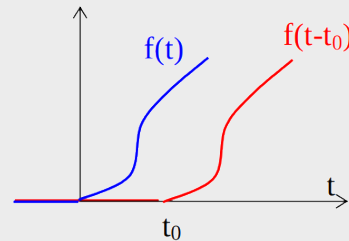
$$L(g(t)) = \frac{1}{p}L(f(t)) + \frac{1}{p}g(0^+)$$

Avec des conditions initiales nulles, une intégration dans le domaine temporel revient à une division par p dans le domaine symbolique de Laplace.

Propriété *Théorème du retard*

$$L(f(t - t_0)) = e^{-pt_0} F(p)$$

e^{-pt_0} est appelé facteur retard.



Propriété *Règle de translation en p*

$$L(e^{-at}f(t)) = F(p + a)$$

Il est possible de retrouver les valeurs limites $f(0^+)$ et $f(+\infty)$ d'un signal dont on connaît la transformée de Laplace $F(p) = L(f(t))$ sans expliciter complètement f , grâce aux 2 théorèmes suivant :

Propriété *Théorème de la valeur initiale (TVI)*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p)$$

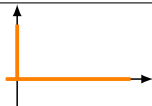
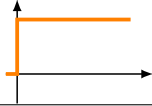
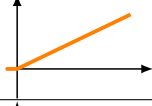
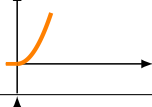
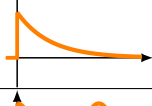
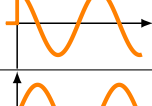
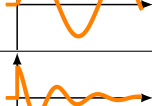
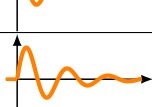

Ce théorème n'est applicable que si cette limite existe et est finie.

 **Propriété** *Théorème de la valeur finale (TVF)*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

Ce théorème n'est applicable que si la partie réelle des pôles de la fonction $F(p)$ est strictement négative.

2.5 Transformées de Laplace usuelles

Nom	Allure	$f(t)$	$F(p)$
Dirac		$\delta(t)$	1
Échelon (Heavyside)		$u(t)$	$\frac{1}{p}$
Rampe		$t.u(t)$	$\frac{1}{p^2}$
Fonction puissance		$t^n . u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
Exponentielle		$e^{-a.t} . u(t)$	$\frac{1}{p + a}$
Cosinus		$\cos(\omega.t) . u(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
Sinus		$\sin(\omega.t) . u(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
Cosinus amorti		$e^{-a.t} . \cos(\omega.t) . u(t)$	$\frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega^2}$
Sinus amorti		$e^{-a.t} . \sin(\omega.t) . u(t)$	$\frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$

3 Fonction de transfert

3.1 Définition de la fonction de transfert

On a vu précédemment que le modèle traduisant la relation entre l'entrée et la sortie d'un système linéaire, continu, et invariant était, dans la grande majorité des cas, une équation différentielle :

$$e(t) \Rightarrow a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t) \Rightarrow s(t)$$

En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de cette équation et en considérant les conditions initiales nulles, on a :

$$a_n p^n S(p) + \dots + a_1 p S(p) + a_0 s(p) = b_m p^m E(p) + \dots + b_1 p E(p) + b_0 E(p)$$

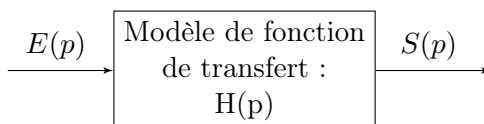
soit : $(a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0) S(p) = (b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0) E(p)$

d'où : $\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}$

On appelle alors fonction de transfert la fonction $H(p)$ définie par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

La relation entrée–sortie du système peut donc se mettre sous la forme $S(p) = H(p) \cdot E(p)$ dans le domaine de Laplace.


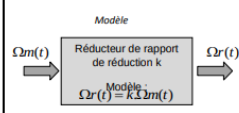
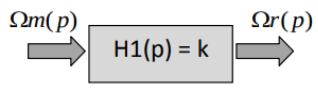

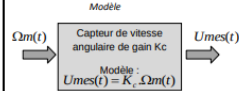
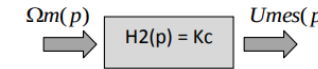


 **Remarque**

$H(p)$ caractérise le comportement du système quelle que soit l'entrée appliquée.

Exemple : Application au robot martien spirit

Déterminons les fonctions de transfert des composants du bloc moto-réducteur
 Commençons par les fonctions de transfert des composants dont la loi entrée-sortie temporelle était de type proportionnelle :

Composant système /	Schéma-bloc temporel	Equation / Loi entrée-sortie domaine temporel	Passage dans le domaine de Laplace	Fonction de transfert $H(p)=S(p)/E(p)$	Schéma-bloc domaine de Laplace
Réducteur 		$\Omega_r(t) = k \cdot \Omega_m(t)$	$L(\Omega_r(t)) = L(k \cdot \Omega_m(t))$ $\leftrightarrow \Omega_r(p) = L(k \cdot \Omega_m(t))$ $\leftrightarrow \Omega_r(p) = k \cdot \Omega_m(p)$	$H1(p) = k$	
Capteur de vitesse angulaire 		$Umes(t) = Kc \cdot \Omega_m(t)$	$Umes(p) = Kc \cdot \Omega_m(p)$	$H2(p) = Kc$	

Déterminons ensuite la fonction de transfert du moteur à courant continu :

3.2.2 Ordre et classe d'une fonction de transfert

En mettant $H(p)$ sous forme canonique, on fait apparaître :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + \dots p + \dots p^2 + \dots + \dots p^m}{1 + \dots p + \dots p^2 + \dots + \dots p^{n-\alpha}}$$

- le degré n du polynôme du dénominateur qui est appelé ordre du système ;
- le coefficient α de l'exposant du terme en « p » au dénominateur qui correspond à la classe du système ;
- le gain statique K

Exemple :

Déterminons l'ordre, la classe et le gain statique de la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{2 + 3p + 5p^2}{3p^2 + 4p^3 + 7p^5}$$

$$H(p) = \frac{2 + 3 \cdot p + 5 \cdot p^2}{3 \cdot p^2 + 4 \cdot p^3 + 7 \cdot p^5} \xrightarrow{\text{forme canonique}} H(p) = \frac{2}{3 \cdot p^2} \cdot \frac{1 + \frac{3}{2} \cdot p + \frac{5}{2} \cdot p^2}{1 + \frac{4}{3} \cdot p + \frac{7}{3} \cdot p^3}$$

ordre : 5
classe : 2
gain statique : $\frac{2}{3}$

Exemple : Application à la fonction de transfert du moteur à courant continu du robot martien Spirit :

$$H(p) = \frac{1}{k_e + \frac{R \cdot J}{k_c} p + \frac{L \cdot J}{k_c} p^2}$$

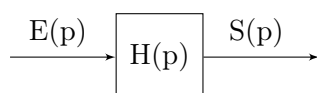
$$H(p) = \frac{1}{k_e + \frac{R \cdot J}{k_c} p + \frac{L \cdot J}{k_c} p^2} \xrightarrow{\text{forme canonique}} H(p) = \frac{1}{k_e} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{R \cdot J}{k_e \cdot k_c} p + \frac{L \cdot J}{k_e \cdot k_c} p^2\right)}$$

ordre : 2
classe : 0
gain statique : $\frac{1}{k_e}$

4 Représentation par schémas-blocs

4.1 Représentation par schéma-bloc d'une fonction de transfert

On utilise couramment les schémas-blocs fonctionnels pour faire apparaître la fonction de transfert qui lie l'entrée et la sortie d'un système :



Remarque

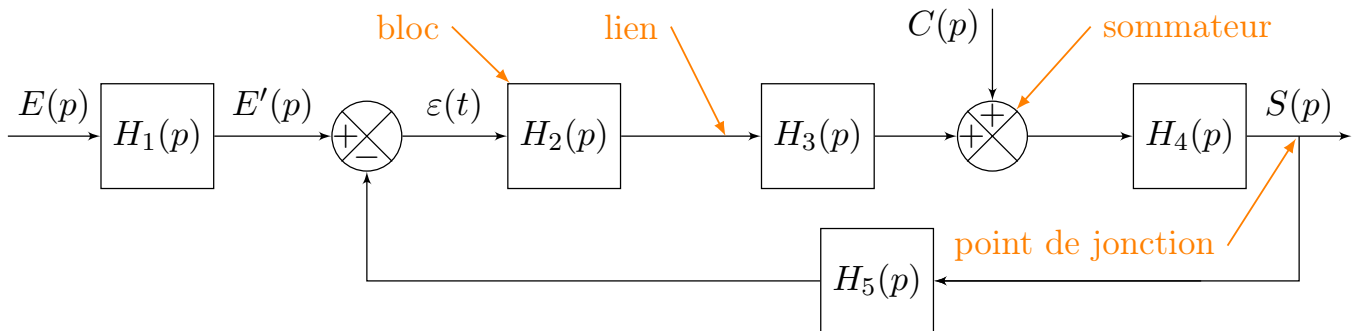
Le schéma-bloc ci-dessus se lit de la manière suivante : $S(p) = H(p) \cdot E(p)$

Exemple : *Application au robot martien spirit*

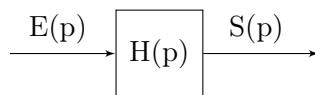
Représentons les schémas-blocs de tous les composants du bloc d'entraînement d'une roue

4.2 Représentation par schéma-bloc d'un système complexe

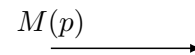
Les éléments de base sont les suivants :



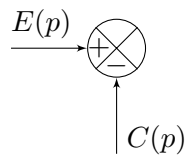
- Bloc



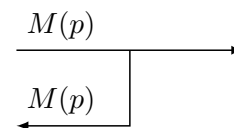
- Lien



- Sommateur



- Point de jonction

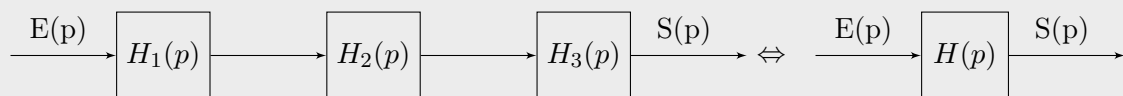


Exemple : *Application au robot martien spirit*

Réalisons le schéma-bloc complet du bloc d'entraînement d'une roue.

4.3 Simplification des schémas-blocs

Propriété *Association de blocs en série*

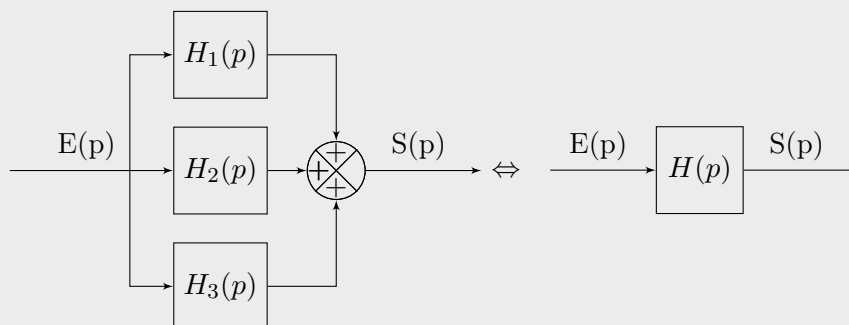


Avec $H(p) = H_1(p) \times H_2(p) \times H_3(p)$

Démonstration :

$$\begin{cases} S(p) = H_3(p)X_2(p) \\ X_2(p) = H_2(p)X_1(p) \\ X_1(p) = H_1(p)E(p) \end{cases} \Rightarrow S(p) = H_1(p)H_2(p)H_3(p)E(p)$$

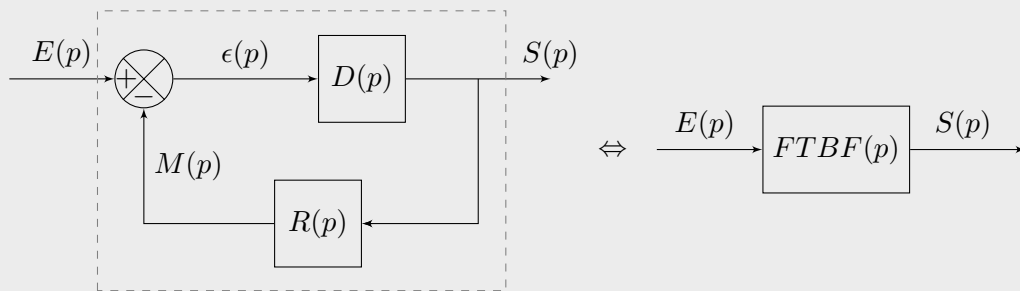
Propriété *Association de blocs en parallèle*



Avec $H(p) = H_1(p) + H_2(p) + H_3(p)$

Démonstration :

$$\begin{cases} X_1(p) = H_1(p)E(p) \\ X_2(p) = H_2(p)E(p) \\ X_3(p) = H_3(p)E(p) \end{cases} \Rightarrow S(p) = (H_1(p) + H_2(p) + H_3(p)) E(p)$$

**Propriété** Fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) d'un système bouclé

Avec

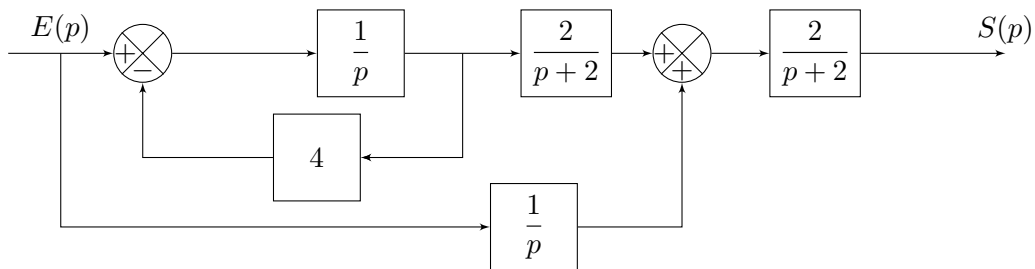
$$FTBF(p) = \frac{D(p)}{1 + D(p) \cdot R(p)}$$

Démonstration :

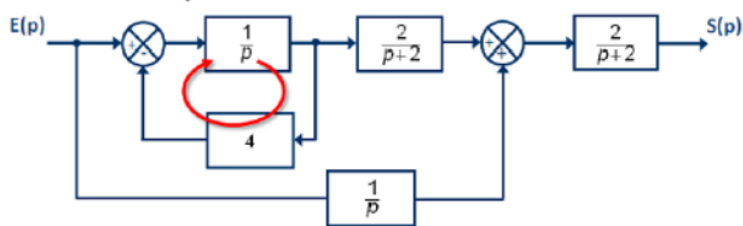
$$\begin{cases} \epsilon(p) = E(p) - R(p)S(p) \\ S(p) = D(p)\epsilon(p) \end{cases} \Rightarrow S(p) = \frac{D(p)}{1 + D(p) \cdot R(p)} E(p)$$

Exemple :

On cherche à déterminer la fonction de transfert du système représenté par le schéma-bloc ci-dessous :

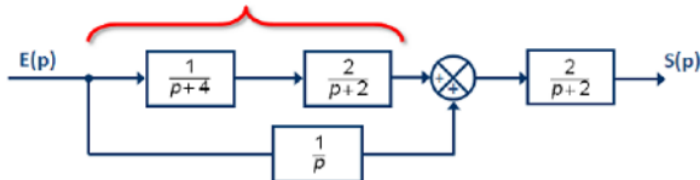


• **Boucle fermée :**



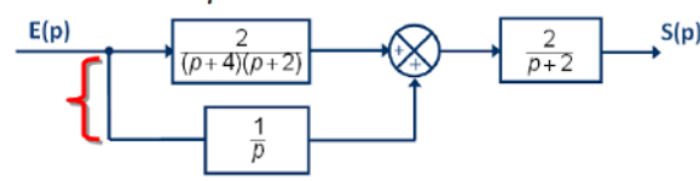
$$H_1(p) = \frac{1/p}{1 + 4/p} = \frac{1}{p+4}$$

• **Blocs en série :**



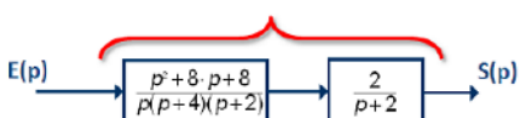
$$H_2(p) = \frac{1}{p+4} \times \frac{2}{p+2} = \frac{2}{(p+4)(p+2)}$$

• **Blocs en parallèle :**



$$H_3(p) = \frac{2}{(p+4)(p+2)} + \frac{1}{p} = \frac{p^2 + 8 \cdot p + 8}{p(p+4)(p+2)}$$

• **Blocs en série :**

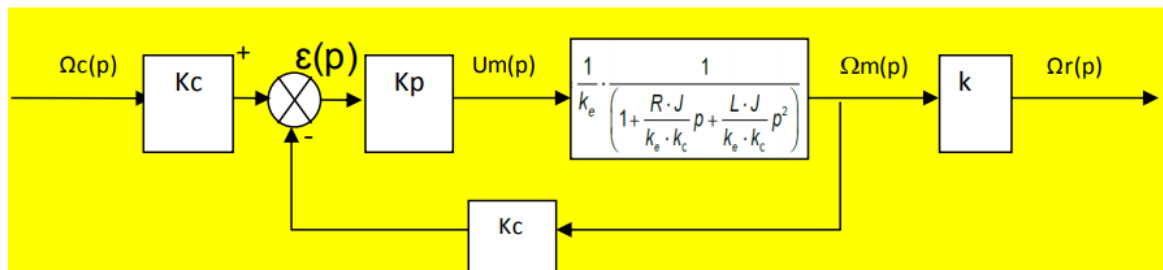



$$H(p) = \frac{p^2 + 8 \cdot p + 8}{p(p+4)(p+2)} \times \frac{2}{p+2} = \frac{2(p^2 + 8 \cdot p + 8)}{p(p+4)(p+2)^2}$$

Exemple :

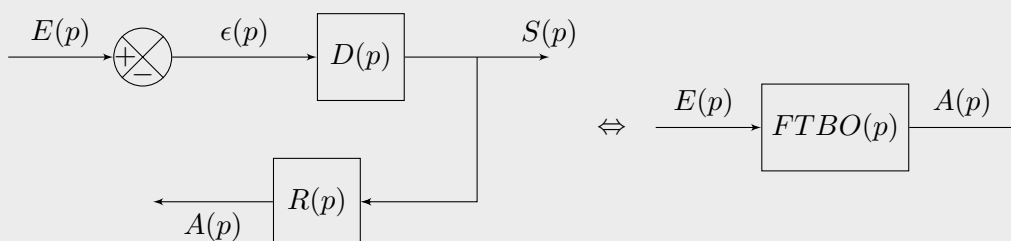
Exemple : Application au robot martien Spirit

Déterminons la fonction de transfert complète du bloc moto-réducteur. On considère que le correcteur utilisé est un correcteur proportionnel de gain K_p :



 **Propriété** Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) d'un système bouclé

Pour étudier les réponses harmoniques des systèmes, on utilisera en fin d'année la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (FTBO) définie comme la fonction de transfert du système lorsque le retour sur le sommateur est coupé. Elle comprend la chaîne d'action et la chaîne de mesure



Avec

$$FTBO(p) = D(p) \cdot R(p)$$

 **Remarque**

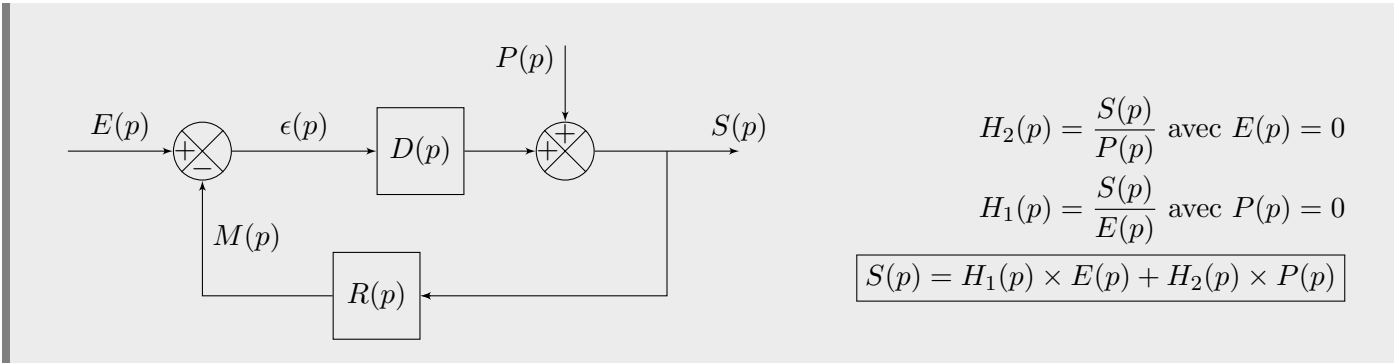
Attention, il s'agit d'un abus de langage : la FTBO n'est pas la fonction de transfert du système s'il était en boucle ouverte, c'est-à-dire s'il n'y avait pas de chaîne de retour avec un capteur !

 **Propriété** Fonction de transfert de systèmes à n entrées - théorème de superposition

On suppose que toutes les entrées sont nulles sauf une. On calcule alors la sortie en fonction de cette lère entrée.

On fait la même chose pour toutes les autres entrées.

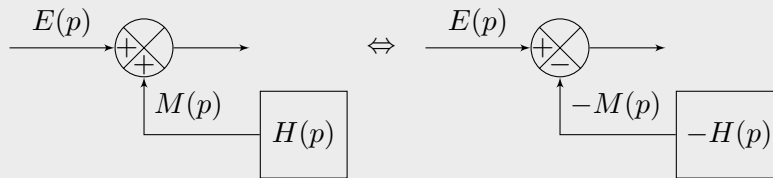
Puis, on détermine la sortie lorsque toutes les entrées sont présentes par le principe de superposition en additionnant toutes les réponses précédentes



Propriété *Modification du signe des comparateurs*

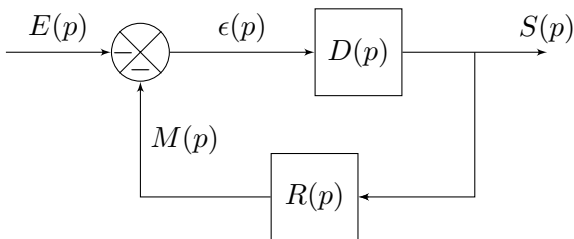
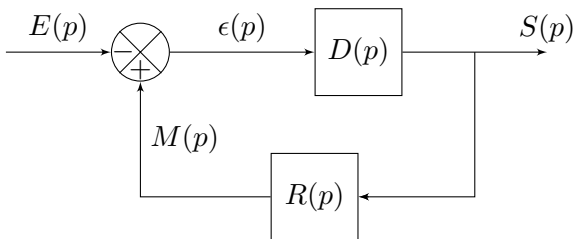
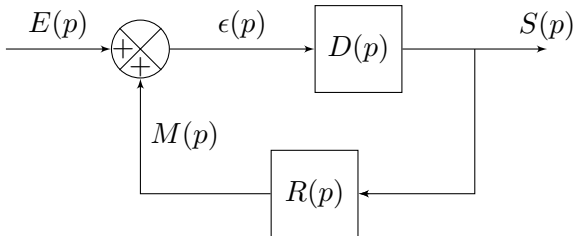
Lorsque l'on travaille sur un schéma-bloc, il faut bien faire attention aux signes des comparateurs (sommateur ou soustracteur) et adapter les règles vues précédemment !

Il ne faut pas hésiter à affecter un signe " - " à certains blocs pour retrouver les règles du cours.



Exemple :

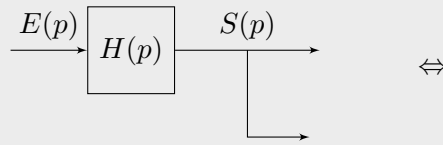
Appliquons ces règles pour calculer une FTBF.



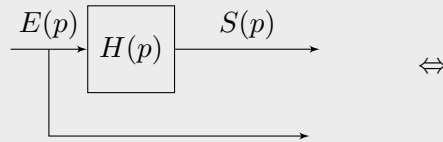
Propriété *Déplacement des points de jonction et des sommateurs*

Les schémas blocs peuvent subir des modifications en vue de les simplifier. Les figures ci-dessous montrent quelques schémas équivalents couramment utilisés.

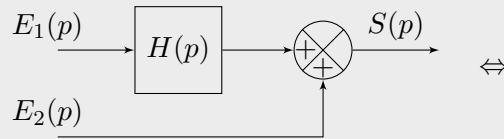
Déplacement
d'un bloc après
un point de
prélevement



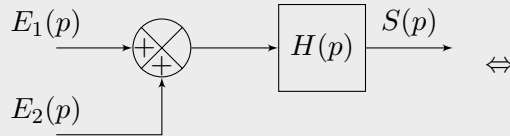
Déplacement
d'un bloc avant
un point de
prélevement



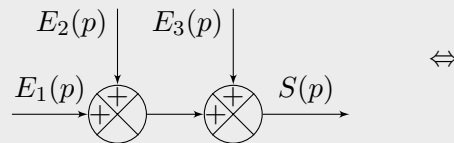
Déplacement
d'un bloc après
un sommateur



Déplacement
d'un bloc avant
un sommateur



Permutation de
deux sommateurs



Remarque

L'inconvénient à modifier la structure du schéma est de perdre le lien entre les entrées/sorties du schéma et les grandeurs physiques du système étudié.