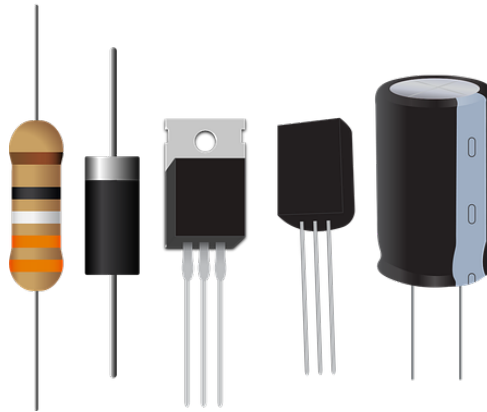




# DIPÔLES ET RÉSEAUX LINÉAIRES



## Compétences visées:

- C1-06** Proposer une démarche permettant de déterminer des grandeurs électriques.
- C2-11** Déterminer les signaux électriques dans les circuits.

## Table des matières

<b>1 Bases</b>	<b>3</b>
1.1 Potentiel, différence de potentiel, tension . . . . .	3
1.2 Courant électrique . . . . .	4
<b>2 Dipôles</b>	<b>6</b>
2.1 Généralités . . . . .	6
2.1.1 Dipôle linéaire . . . . .	6
2.1.2 Dipôle non linéaire . . . . .	8
2.1.3 Dipôle générateur et dipôle récepteur . . . . .	9
2.2 Caractéristique statique d'un composant . . . . .	9
2.3 Point de fonctionnement statique . . . . .	10
2.4 Aspect énergétique des dipôles linéaires . . . . .	11
<b>3 Réseaux linéaires</b>	<b>13</b>
3.1 Généralités . . . . .	13
3.2 Lois de Kirchhoff . . . . .	15
3.2.1 Définitions . . . . .	15
3.2.2 Equations . . . . .	15
3.2.3 Complexité d'un réseau . . . . .	16
3.3 Théorèmes de Thévenin et Norton . . . . .	17
3.3.1 Théorème de Thévenin . . . . .	17
3.3.2 Théorème de Norton . . . . .	17
3.4 Théorème de superposition . . . . .	18
3.5 Théorème de Millman . . . . .	19



# 1 Bases

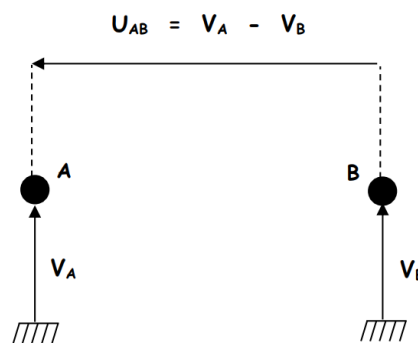
Les notions de nous allons voir ou revoir sont abstraites car l'électricité n'est pas visible à l'œil nu. En revanche, les effets de l'électricité le sont : éclairage, chauffage, rotation d'un moteur voire électrisation. Pour « visualiser » l'électricité nous aurons toujours besoin d'un appareil de mesure.

## 1.1 Potentiel, différence de potentiel, tension

On appelle tension au point  $A$  et on le note  $V_A$  la valeur du potentiel électrique de ce point par rapport à une référence – en général la terre ou la masse métallique (carlingue d'un avion, carrosserie d'une voiture).

L'unité de la tension est le Volt (symbole  $V$ ) du nom d'Alessandro Volta inventeur de la pile électrique.

Entre deux points  $A$  et  $B$  de potentiel respectif  $V_A$  et  $V_B$  nous pouvons mesurer une différence de potentiel  $U_{AB}$  qui vaut le potentiel en  $A$  moins le potentiel en  $B$  soit  $U_{AB} = V_A - V_B$



Le symbole de la masse est en général : son potentiel est  $0V$

Par abus de langage nous appellerons aussi tension la différence de potentiel.

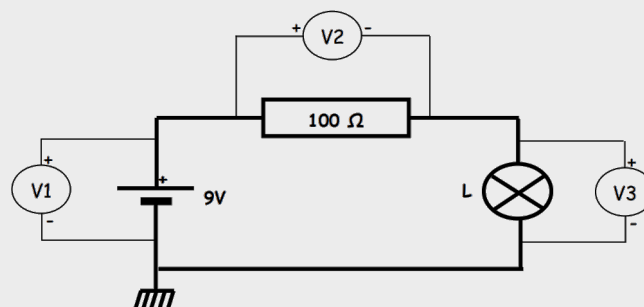
$U_{AB}$  est appelée « tension entre »  $A$  et  $B$

### Exemple :

Si le potentiel en  $A$  vaut  $200V$  et si le potentiel en  $B$  vaut  $80V$  la tension entre  $A$  et  $B$  vaudra  $120V$   
 $U_{AB} = 120V$

### Propriété Mesure de tension

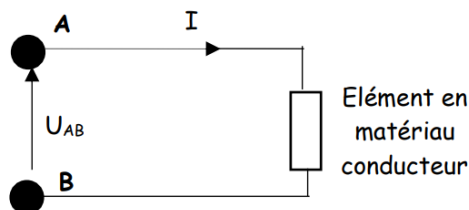
Pour mesurer une tension on utilise un Voltmètre que l'on place en dérivation sur le circuit :



- $V1$  mesure la tension délivrée par la pile  $9V$
- $V2$  mesure la différence de potentiel aux bornes de la résistance de  $100\Omega$
- $V3$  mesure la tension aux bornes de la lampe  $L$

## 1.2 Courant électrique

Quand il règne une différence de potentiel entre deux points et que l'on ferme le circuit entre ces deux points par l'intermédiaire d'un élément réalisé dans un matériau conducteur de l'électricité, un courant électrique va circuler entre ces deux points.



Le courant circule du point de plus fort potentiel au point de plus faible potentiel.

On notera  $I$  le courant.  $I$  est l'intensité du courant électrique.

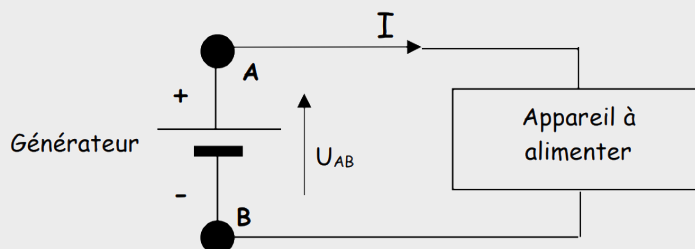
L'unité du courant est l'Ampère (symbole  $A$ ) du nom d'André-Marie Ampère physicien français.

### Exemple :

Si le potentiel en  $A$  vaut  $200\text{ V}$  et si le potentiel en  $B$  vaut  $80\text{ V}$  et que l'on ferme le circuit avec un matériau conducteur, un courant  $I$  va circuler de  $A$  vers  $B$ .

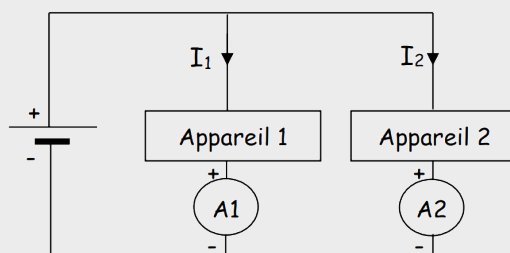
### Remarque *Cas particulier du générateur*

A l'intérieur d'un générateur (pile, batterie) le courant circule du potentiel le plus faible vers le potentiel le plus élevé.



### Propriété *Mesure du courant*

Pour mesurer un courant, on place un Ampèremètre en série dans le circuit



- $A1$  mesure le courant  $I_1$  circulant dans l'appareil 1
- $A2$  mesure le courant  $I_2$  circulant dans l'appareil 2

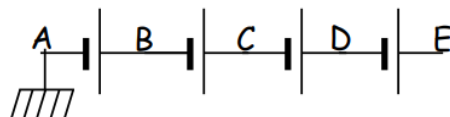
**Exemple :** *Quelques ordres de grandeur d'intensité de courants*

Foudre	25 kA à 200 kA
Electrolyse de l'aluminium	100 kA
Alternateur de centrale	5 kA
Motrice de train	500 A
Démarrreur d'automobile	50 A
Plaques de cuisson	2 A à 20 A
Lampe à incandescence	100 mA à 700 mA
Montre à quartz	1 $\mu$ A à 2 $\mu$ A

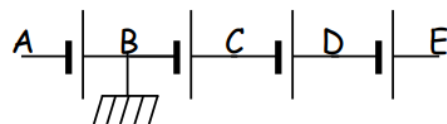
Effets du courant électrique sur le corps humain		
Perception cutanée	Electrisation	1 mA
Secousse électrique		5 mA
Seuil de non lâcher		10 mA
Mort par paralysie respiratoire	Electrocution	30mA si temps > 500 ms

**Exemple :** *Exercice d'application*

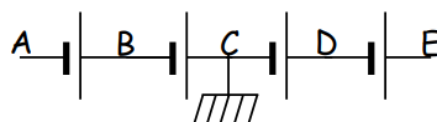
Quatre piles 1,5V montées en série :



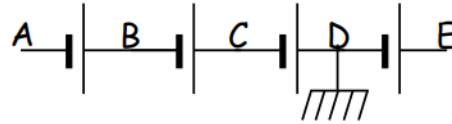
**Q1** Les tensions des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  et  $E$  valent :



**Q2** Les tensions des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  et  $E$  valent :



**Q3** Les tensions des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  et  $E$  valent :




**Q4** Les tensions des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  et  $E$  valent :

## 2 Dipôles

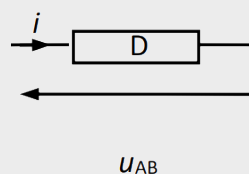
### 2.1 Généralités

Lorsqu'on modélise un circuit électrique réel, le dipôle (bipôle) est l'élément le plus réduit que l'on puisse définir dans le schéma équivalent au circuit électrique.

Un circuit électrique réel peut être modélisé par une association de dipôles. Cependant, cette modélisation n'est jamais parfaite. Elle représente toujours un fonctionnement simplifié qui fait abstraction des phénomènes de propagation des grandeurs électriques dans les circuits. Ce type de modélisation ne prend pas en compte les dimensions des circuits réels.

 **Définition** *Caractérisation d'un dipôle*

Soit un dipôle représenté ci-dessous :




Le dipôle  $D$  est entièrement défini par la relation liant  $u_{AB}$  à  $i$ .  
Selon le type de relation on distingue plusieurs types de dipôles.

#### 2.1.1 Dipôle linéaire

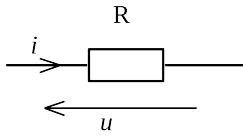
La relation liant  $u$  à  $i$  est une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

Les dipôles linéaires élémentaires sont les suivants :

 **Définition** *Dipôles passifs*

Ce type de dipôle ne peut fournir (durablement) de l'énergie.  
La représentation de ces dipôles est en convention récepteur.

Resistance

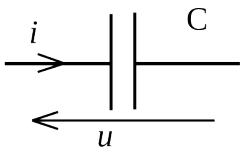


$$u(t) = Ri(t)$$

$R$  s'exprime en Ohms :  $\Omega$

On définit l'inverse de la résistance comme étant la conductance  $i(t) = Gu(t)$

Condensateur

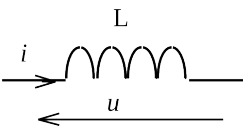


$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = Cu'(t)$$

$C$  s'exprime en Farads :  $F$

$u(t)$  ne peut être discontinu.

Inductance/bobine/self



$$u_l(t) = L \frac{di(t)}{dt} = Li'(t)$$

$L$  s'exprime en Henrys :  $H$

$i(t)$  ne peut être discontinu.

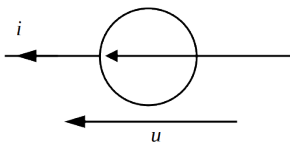
 **Définition** *Dipôles actifs*

Ce type de dipôle peut fournir (durablement) de l'énergie.

La représentation de ces dipôles est en convention générateur.

• **Sources indépendantes**

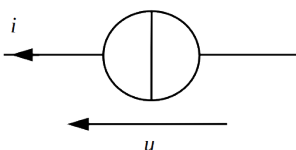
Tension



$u$  est indépendante de  $i$ .

$u$  est imposée et s'exprime en Volts : (symbole  $V$ )

Courant

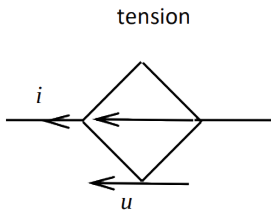


$i$  est indépendante de  $u$ .

$i$  est imposée et s'exprime en Ampères : (symbole  $A$ )

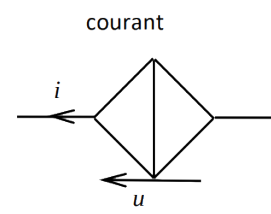
• Sources dépendantes ou contrôlées

Tension



$u$  est contrôlée par une autre grandeur électrique du circuit :  $i_1$  ou  $u_1$   
 $u = a \cdot i_1$  ou  $u = b \cdot u_1$   
**Remarque** :  $a$  est homogène à une résistance alors que  $b$  est un coefficient

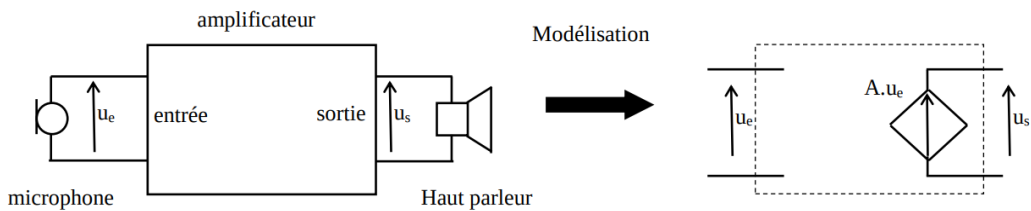
Courant



$i$  est contrôlée par une autre grandeur électrique du circuit :  $i_1$  ou  $u_1$   
 $i = a \cdot u_1$  ou  $i = b \cdot i_1$   
**Remarque** :  $a$  est homogène à une conductance alors que  $b$  est un coefficient.

**Exemple :**

Un amplificateur (audio) peut être modélisé (dans une première approche) par le modèle suivant



$A$  est le coefficient d'amplification en tension soit le rapport entre les amplitudes de la tension de sortie et la tension d'entrée.

 **Remarque**

Un composant réel est en général modélisé par l'association de plusieurs dipôles simples

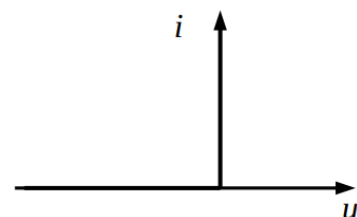
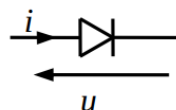
2.1.2 Dipôle non linéaire

La relation liant  $u$  à  $i$  n'est plus linéaire

L'exemple de dipôle non linéaire le plus courant est la diode (ou soupape) parfaite :

si  $i > 0 \Rightarrow u = 0$

si  $u < 0 \Rightarrow i = 0$



### Remarque

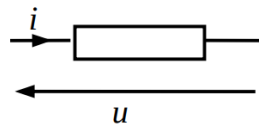
Tout composant réel est forcément non linéaire ; néanmoins on pourra en général le modéliser par des éléments linéaires dans un domaine d'utilisation restreint.

### Exemple :

Une lampe à incandescence est modélisable par une résistance. Or la résistance du filament change avec sa température. Si on fait circuler un courant croissant dans cette lampe, la tension à ses bornes ne va pas augmenter proportionnellement car plus le courant augmente plus la puissance absorbée par cette lampe augmente et plus la température du filament augmente. Ce composant n'est donc pas linéaire. Cependant si on étudie cette lampe autour de son point de fonctionnement nominal, on peut considérer qu'elle est équivalente à une résistance dont la valeur reste quasiment constante (si la température ne change pas beaucoup). On pourra alors dire que le composant est linéarisé autour d'un point de fonctionnement.

### 2.1.3 Dipôle générateur et dipôle récepteur

Un dipôle est **récepteur** lorsqu'il reçoit de l'énergie. Par convention le courant et la tension sont alors comptés positivement avec le sens suivant :



Réciproquement, un dipôle est **générateur** lorsqu'il fournit de l'énergie. Le courant ou la tension est alors inversé par rapport à la convention récepteur ( $i$  et  $u$  ont la même direction)

### Remarque

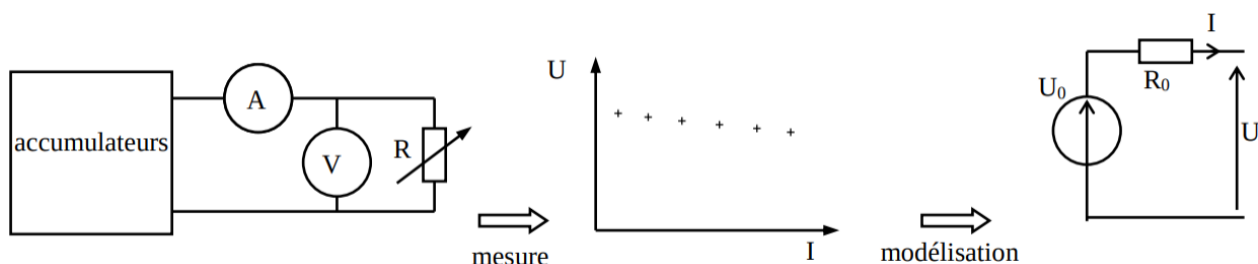
Un dipôle réel peut être générateur ou récepteur selon l'utilisation que l'on en fait, par ex un accumulateur est récepteur lorsqu'on le charge, générateur lorsqu'il se décharge.

## 2.2 Caractéristique statique d'un composant

C'est la loi  $U = f(I)$  (ou  $I = g(U)$ ) pour  $U$  et  $I$  continus (régime établi). Il est fondamental de pouvoir mesurer cette caractéristique car elle permet une première modélisation d'un composant.

### Propriété Batterie d'accumulateurs

On souhaite modéliser une batterie d'accumulateurs. Pour cela, on la connecte à une résistance variable et on mesure plusieurs couples de valeurs de  $U$  et  $I$ . Après avoir placé tous ces points dans le plan  $U, I$  on en déduit une équation  $U = f(I)$  puis un modèle équivalent (qui aura la même équation)





## Remarque

Le modèle établi à partir d'une caractéristique statique ne peut comporter ni condensateur ni inductance. Pour mettre en évidence les phénomènes capacitifs ou inductifs il faut réaliser des essais avec des grandeurs variables en fonction du temps.

### 2.3 Point de fonctionnement statique

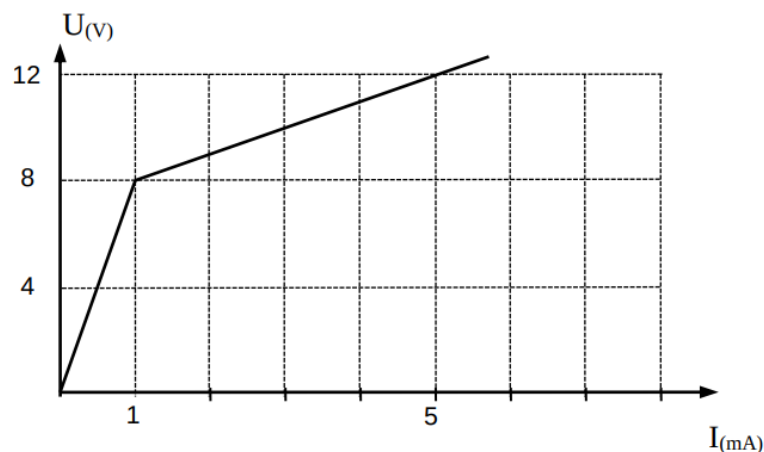
Lorsqu'un dipôle générateur et un dipôle récepteur sont interconnectés, le courant qui les traverse est le même et ils sont soumis à la même tension.

On peut déterminer graphiquement les valeurs de  $U$  et de  $I$  en remarquant que si l'on trace les deux caractéristiques statiques dans un même repère le point d'intersection des caractéristiques a pour coordonnées les valeurs de  $U$  et de  $I$ .

Ce point d'intersection est aussi appelé **point de fonctionnement**. Cette méthode est particulièrement intéressante lorsque les dipôles sont non linéaires et qu'il n'existe pas de solution analytique.

**Exemple :** *Point de fonctionnement statique.*

On associe un dipôle linéaire générateur modélisé par  $E, R$  ( $12\text{ V } 1500\ \Omega$ ) à un dipôle  $D$  ayant la caractéristique statique suivante : ( $U$  et  $I$  sont comptés positivement avec la convention récepteur)



**Q5** Déterminer le point de fonctionnement (les valeurs de  $U$  et  $I$  dans le dipôle) en traçant la caractéristique du générateur.

**Q6** Vérifier par le calcul en modélisant partiellement le dipôle  $D$  par un dipôle linéaire.

## 2.4 Aspect énergétique des dipôles linéaires

La puissance instantanée pénétrant dans un dipôle a pour expression (avec la convention récepteur) :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

La puissance est une fonction intégrable du temps.

L'énergie échangée sur un intervalle de temps a pour expression :

$$W(t_2) - W(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt \quad t_1 \text{ et } t_2 \text{ étant quelconques}$$

On peut alors vérifier les points suivants :

### Propriété Résistance

$$p_R(t) = R \cdot i^2(t)$$

Une résistance ne peut qu'absorber de la puissance car  $i^2(t)$  est une fonction positive.

Une résistance absorbe de la puissance et ne la restitue jamais. Elle transforme l'énergie reçue de manière irréversible en chaleur.

### Propriété Inductance

$$p_L(t) = i(t) \cdot L \frac{di(t)}{dt} = \frac{L}{2} \frac{di^2(t)}{dt}$$

Une inductance peut absorber ou restituer de la puissance.

$$W_0^t = \int_0^t i(t) \cdot L \frac{di(t)}{dt} dt = L \int_0^t i \frac{di}{dt} dt = L \int_0^t i di = L \left[ \frac{i^2}{2} \right]_0^t$$

Si l'on considère qu'il n'y a initialement aucune énergie stockée dans l'inductance  $W_L(t) = \frac{1}{2} Li(t)^2$

$$W = \frac{1}{2} Li^2$$

### Propriété Condensateur

$$p_C(t) = u \cdot C \frac{du(t)}{dt} = \frac{C}{2} \frac{du(t)^2}{dt}$$

Un condensateur peut absorber ou restituer de la puissance.

Si l'on considère qu'il n'y a initialement aucune énergie stockée dans le condensateur

$$W_C(t) = \frac{1}{2} Cu(t)^2$$

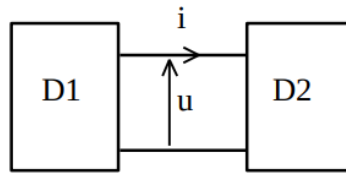
$$W = \frac{1}{2} Cu^2$$

Les inductances et condensateurs (parfaits) ne dissipent pas de puissance.

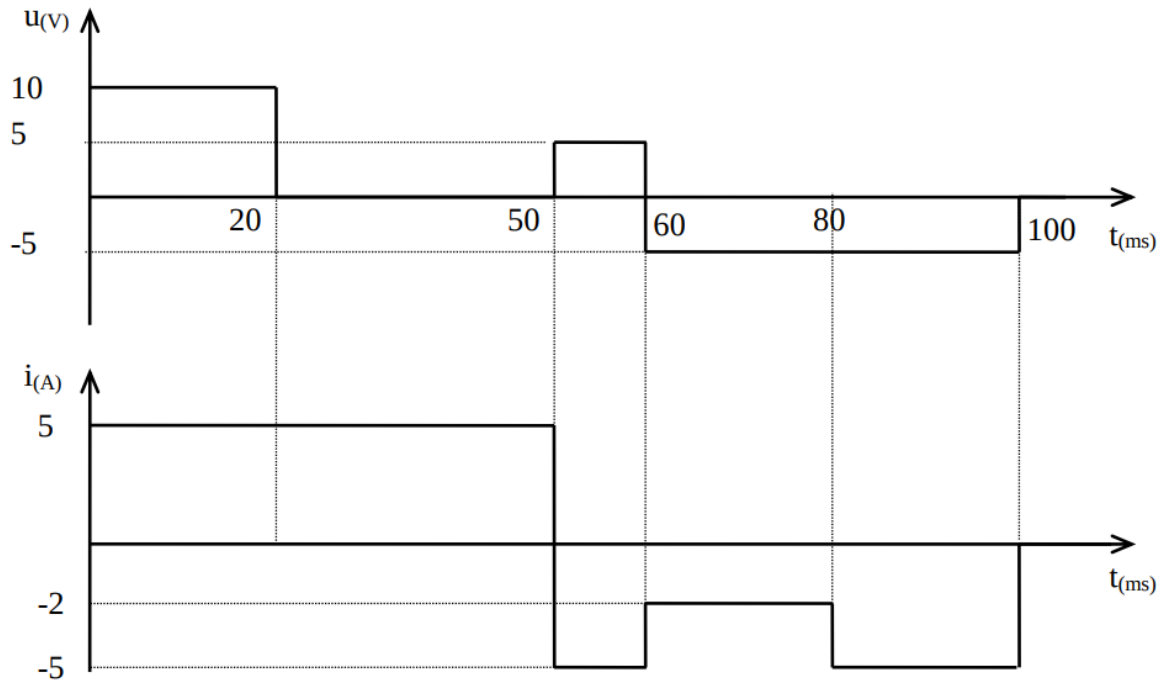


**Exemple :** *Puissance échangée entre deux dipôles.*

On considère deux dipôles D1 et D2 interconnectés comme ci-dessous :



Les évolutions temporelles de la tension et du courant sont les suivantes :



**Q7** Quelle est la puissance maximale échangée entre les deux dipôles ?

**Q8** Indiquer quel est le dipôle générateur pour chacune des séquences.

**Q9** Représenter l'évolution de l'énergie transmise de D1 vers D2 en fonction du temps

**Q10** Quelle est la puissance moyenne échangée durant la période de 100 ms

### 3 Réseaux linéaires

Un réseau électrique est constitué de dipôles interconnectés. Si Chacun de ces dipôles est un dipôle linéaire, le réseau est linéaire : il est alors régi par un système d'équations linéaires.

Les dipôles simples linéaires peuvent être des


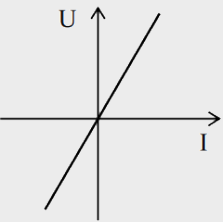
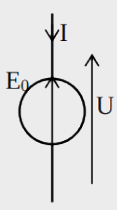
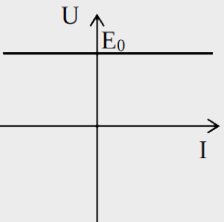
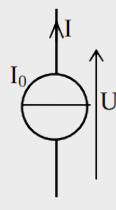
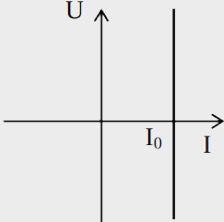
- sources de tension ou courant
- résistances
- les condensateurs et inductances n'apparaissent qu'en régime variable.

#### 3.1 Généralités

**Définition** *Convention d'écriture*

- les grandeurs sont représentées par des lettres ou combinaisons de lettres-chiffres avec les règles suivantes
- lettre minuscule : valeur électrique instantanée :  $i$  représente en fait  $i(t)$
- lettre majuscule : valeur constante ou valeur efficace

**Définition** *Caractéristiques des dipôles élémentaires en continu*

Résistance	Source de tension	Source de courant
  <p style="text-align: center;"><math>U = R.I</math> ou <math>I = G.U</math></p> <p>Dipôle <b>passif</b> : ne peut qu'être récepteur</p>	  <p style="text-align: center;"><math>U = E_0</math> quelque soit <math>I</math></p> <p>Dipôle <b>actif</b> : peut être récepteur ou générateur.</p>	  <p style="text-align: center;"><math>I = I_0</math> quelque soit <math>U</math></p> <p>Dipôle <b>actif</b> : peut être récepteur ou générateur.</p>

### Propriété Association des dipôles

On peut se poser la question : que devient la caractéristique d'une association de dipôles simples ? Lorsqu'on associe des dipôles de même type, la réponse est la suivante :

#### Résistances

- En série : la résistance équivalente est la somme des résistances  $R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$
- En parallèle : la conductance équivalente est la somme des conductances  $G_{eq} = G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n$
- Cas particulier de 2 résistances en parallèle :  $G_{eq} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$  soit  $R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

#### Sources de tension

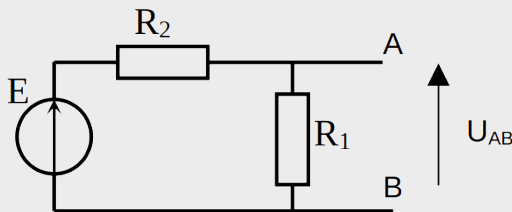
- En série : la source de tension équivalente est la somme des sources  $E_{eq} = E_1 + E_2 + \dots + E_n$
- En parallèle : impossible (sauf si les sources sont de valeur égale)

#### Sources de courant

- En série : impossible (sauf si les sources sont de valeur égale)
- En parallèle : la source de courant équivalente est la somme des sources  $I_{eq} = I_1 + I_2 + \dots + I_n$

### Définition Pont diviseur de tension

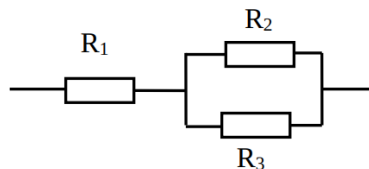
Dans le circuit suivant, lorsque le courant de sortie  $I_A$  est nul (à vide par exemple) :



La tension de sortie  $U_{AB} = E \frac{R_1}{R_1 + R_2}$

### Exemple : Résistance équivalente

**Q11** Calculer la résistance équivalente à l'association suivante



On donne :  $R_1 = 330 \Omega$ ,  $R_2 = 220 \Omega$  et  $R_3 = 820 \Omega$ .

### 3.2 Lois de Kirchhoff

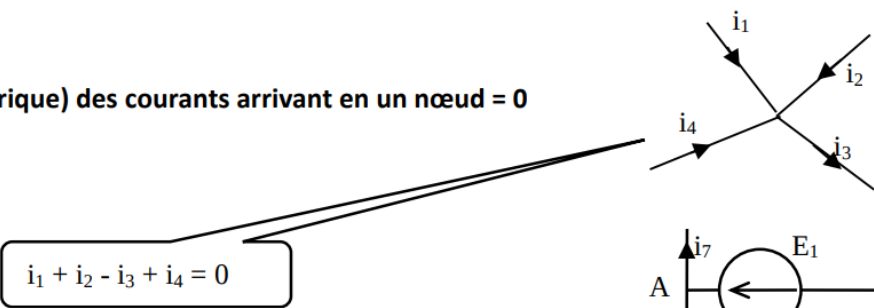
#### 3.2.1 Définitions

- **nœud** : interconnexion d'au moins 3 dipôles.
- **branche** : ensemble des dipôles entre 2 nœuds.
- **maille** : ensemble de branches constituant un circuit fermé.

#### 3.2.2 Equations

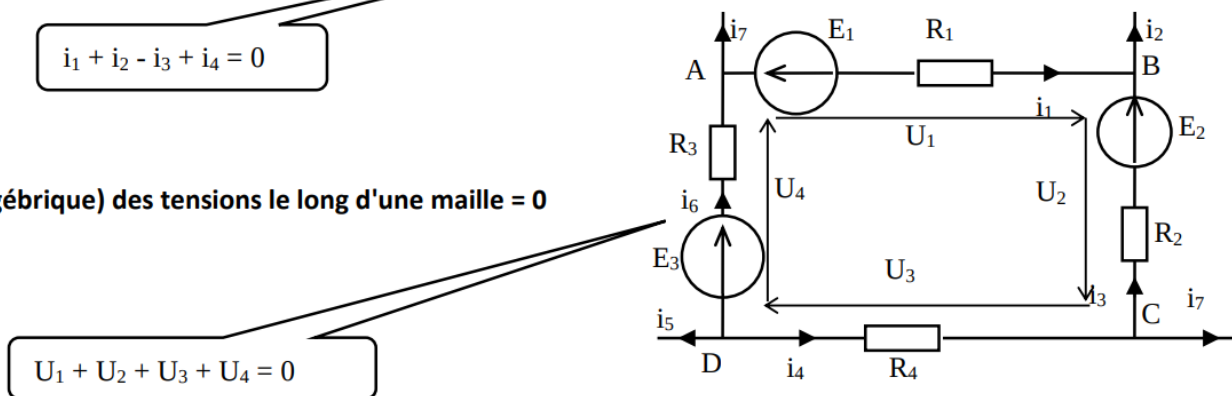
Les lois de Kirchhoff consistent à dire que :

**Somme (algébrique) des courants arrivant en un nœud = 0**



$$i_1 + i_2 - i_3 + i_4 = 0$$

**Somme (algébrique) des tensions le long d'une maille = 0**



$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = 0$$

Soit :  $-E_1 - R_1 i_1 - E_2 + R_2 i_3 + R_4 i_4 + E_3 - R_3 i_6 = 0$

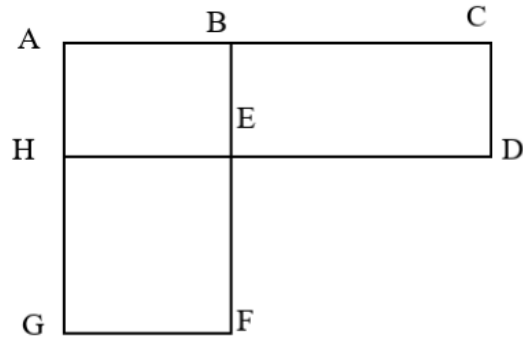
Un circuit à  $n$  nœuds et  $m$  mailles indépendantes est donc décrit par un système de  $m + n$  équations linéaires.

Dans la pratique, les équations des nœuds sont très simples ; il est donc possible de diminuer le nombre d'équations en ne gardant que les équations de mailles et en résolvant implicitement les équations de nœuds. Le système est donc régi par  $m$  équations linéaires en fonctions de  $m$  courants choisis judicieusement dans chacune des mailles.

### 3.2.3 Complexité d'un réseau

La complexité d'un réseau dépend directement du nombre de mailles indépendantes qu'il possède. Des mailles sont indépendantes lorsque aucune ne peut être une combinaison des autres.

**Exemple :**

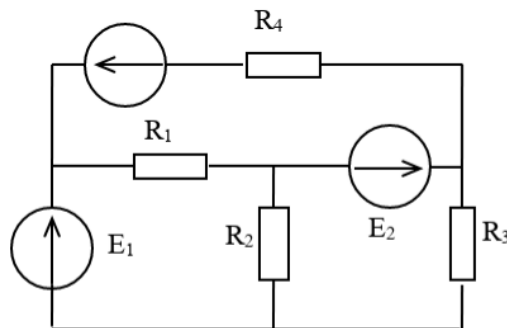


Ce circuit comporte 3 mailles indépendantes qui peuvent être : ABEH, BCDE, EFGH

Les mailles ABCDEH, ABEFGH, et ABCDEFGH constituent aussi un système de 3 mailles indépendantes.

Mais les mailles ABCDEH, EFGH et ABCDEFGH ne constituent pas des mailles indépendantes. (la troisième est la somme des 2 autres)

**Exemple :**



Les équations du circuit peuvent être :

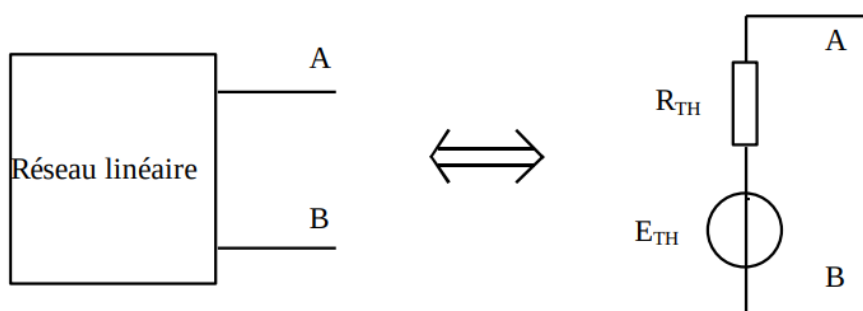
### 3.3 Théorèmes de Thévenin et Norton

Si un réseau est linéaire, la relation entre courant et tension entre deux points de ce réseau est une relation linéaire. En continu cette relation est donc forcément du type  $U = U_0 \pm RI$  ou  $I = I_0 \pm GU$ . Les théorèmes de Thévenin et Norton traduisent cette propriété.

#### 3.3.1 Théorème de Thévenin

Le dipôle équivalent entre 2 points quelconques d'un réseau linéaire peut être une association en série :

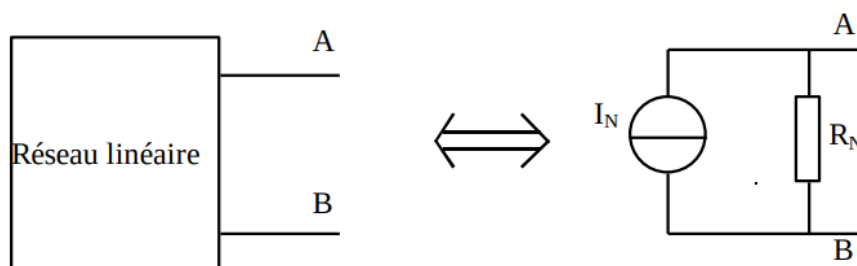
- d'une source de tension  $E_{TH}$  ( $E_V$ ) égale à la tension à vide du dipôle
- d'une résistance  $R_{TH}$  dont la valeur est la résistance "vue" entre les deux points lorsque toutes les sources indépendantes sont éteintes.



#### 3.3.2 Théorème de Norton

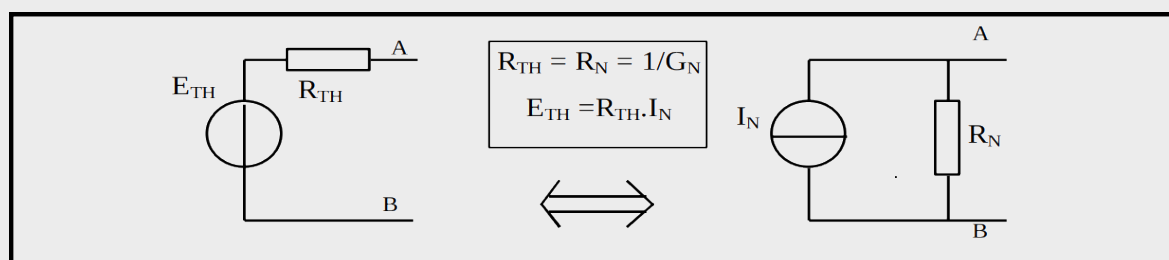
Le dipôle équivalent entre 2 points quelconques d'un réseau linéaire peut être une association en parallèle :

- d'une source de courant  $I_N$  ( $I_{CC}$ ) égale au courant de court-circuit du dipôle
- d'une conductance  $G_N$  dont la valeur est la conductance "vue" entre les deux points lorsque toutes les sources indépendantes sont éteintes.



#### Remarque

Il y a une dualité entre ces deux dipôles qui permet de passer d'une structure à l'autre très simplement :



On pourra utiliser cette dualité pour modifier la structure d'un réseau et rendre ainsi les calculs plus faciles en diminuant le nombre de mailles.

### 3.4 Théorème de superposition

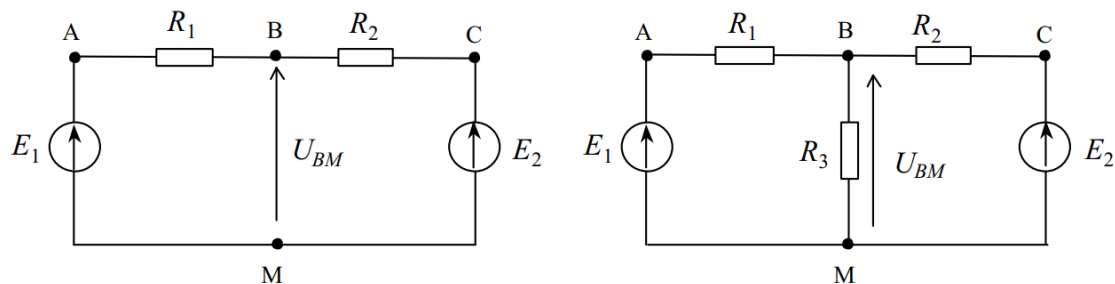
Le courant (la tension) est la somme algébrique de chacun des courants (des tensions) qu'y détermine successivement chacune des sources indépendantes lorsque toutes les autres sont éteintes.



#### Remarque

On peut encore remarquer que seules les sources indépendantes (autonomes) sont concernées. Dans le cas où il y a des sources liées (contrôlées) ces sources ne peuvent être éteintes pour l'application des différents théorèmes. Les lois de Kirchhoff restent par contre tout à fait applicables.

#### Exemple :



#### Q12

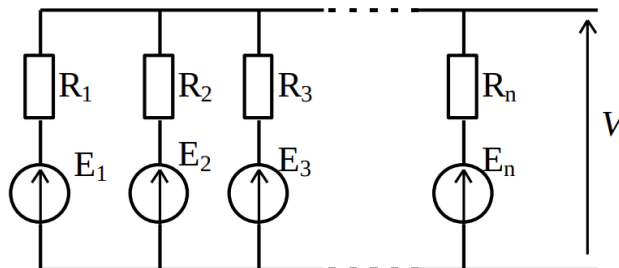
Déterminer pour le schéma de gauche de la figure les éléments du générateur équivalent de Thévenin vu des points  $B$  et  $M$ . En déduire les éléments du générateur équivalent de Norton.

#### Q13

En déduire la différence de potentiel  $U_{BM}$  dans le cas du schéma de droite de figure précédente.

### 3.5 Théorème de Millman

C'est une extension du théorème de Norton. Cela permet de calculer la tension en un nœud d'un circuit où sont connectés des dipôles de Thévenin. Si on interconnecte  $n$  dipôles de Thévenin la tension commune a pour expression :



$$V = \frac{\sum_1^n \frac{E_i}{R_i}}{\sum_1^n \frac{1}{R_i}}$$