Courant alternatif sinusoïdal

Cours

Séquence 14 - Conversion statique

v1

Lycée Jean Zay – 21 rue Jean Zay – 63300 Thiers – Académie de Clermont-Ferrand

Compétences visées:

C2-11	Déterminer les signaux électriques dans les circuits.
F2-03	Choisir les composants de la chaine de puissance.

Table des matières

1 Définitions

L'étude des circuits en alternatif sinusoïdal est fondamentale car :
- la production, le transport et la distribution d'énergie sont essentiellement réalisés en sinusoïdal
- toutes les grandeurs périodiques peuvent être décomposées en combinaisons de grandeurs sinusoïdales.

Une grandeur alternative a pour expression :

$$x(t) = \hat{X} \sin(\omega t + \varphi)$$

- $\hat{X}$: amplitude ou valeur maximale
- ω : pulsation en rad/s
- t : temps en s
- φ : phase à l'origine des temps en rad

On définit $T = 2\pi/\omega = 1/f$: période du signal en s
ou $f = \omega/2\pi = 1/T$: fréquence du signal en Hz $(\omega = 2\pi f)$

2 Valeur efficace ou valeur RMS

RMS : (root mean square : racine de la moyenne du carré)

La valeur efficace est définie ainsi :

$$X = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} \left(\hat{X}\sin(\omega t + \varphi)\right)^2 dt}$$

On peut vérifier que : $X = \dfrac{\hat{X}}{\sqrt{2}}$ (Valable uniquement pour un signal sinusoïdal !)

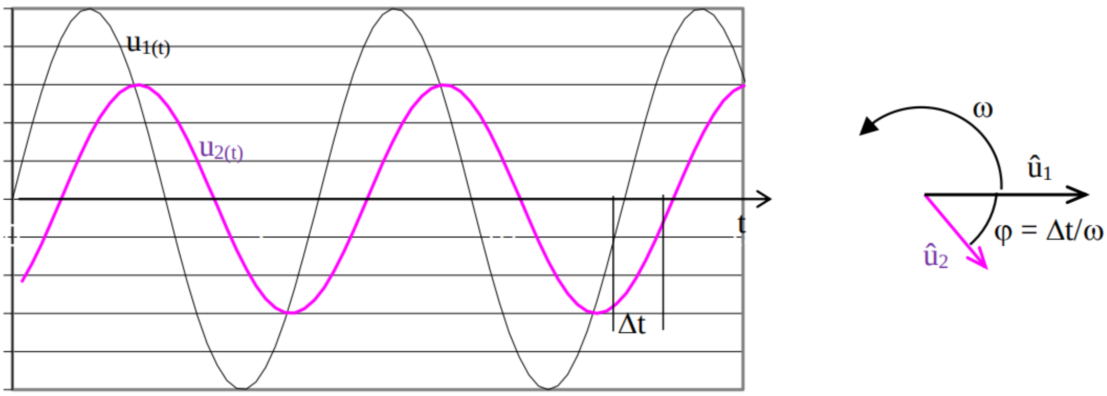
On peut donc écrire que $x(t) = X\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$

3 Représentations

On a coutume de représenter les grandeurs sinusoïdales par des vecteurs tournant à la vitesse ω dans un même plan. Il suffit de projeter sur un axe fixe pour obtenir la (les) grandeur(s) sinusoïdales.

Donc, les compositions des fonctions sinusoïdales peuvent se ramener à des compositions de vecteurs.

Un vecteur dans un plan peut être identifié par un nombre complexe (le plan devient alors le plan complexe) dont les parties réelles et imaginaires correspondent aux deux coordonnées du vecteur dans un repère orthonormé.



Il y a donc deux outils spécifiques utilisables en alternatif :

- les vecteurs de Fresnel (outil graphique) $x(t)$ est la projection sur un axe d'un vecteur tournant à la vitesse angulaire ω.
- les nombres complexes (outil analytique) $x(t)$ est la partie réelle (ou imaginaire) d'un nombre complexe $\underline{x}(t) = \hat{X} e^{j(\omega t + \varphi)}$

Remarque *Convention*

Les grandeurs complexes sont représentées en majuscule soulignée. Une grandeur en majuscule non-soulignée représente la valeur efficace ou le module de la grandeur complexe associée. Ainsi :
$\underline{I}$ représente un nombre complexe
I représente le module de $\underline{I}$ (en mathématique on écrirait $|\underline{I}|$) ou la valeur efficace de $i(t)$
$\hat{I}$ ou $\hat{i}$ représente la valeur maximale de $i(t)$ $\quad \hat{I} = I\sqrt{2}$

4 Puissances

4.1 Puissance moyenne ou active

C'est la valeur moyenne de la puissance instantanée : $p(t) = u(t)i(t)$

Si u et i sont alternatifs sinusoïdaux, la puissance moyenne est définie ainsi :

$$P = < p > = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \hat{U} \sin(\omega t + \varphi) \cdot \hat{I} \sin(\omega t)$$

φ est la phase de U par rapport à I

Pour calculer cette intégrale, on linéarise le produit en utilisant la formule :
$\sin(a)\sin(b) = 1/2(\cos(a-b) - \cos(a+b))$

Le résultat de ce calcul est :

$$P = UI\cos\varphi \qquad \text{en W}$$

4.2 Puissance réactive

La puissance réactive n'a pas de réalité physique. Elle représente la partie fluctuante de la puissance instantanée. (Celle qui change de signe au cours de la période). Elle est définie ainsi :

$$Q = UI\sin\varphi \qquad \text{en VAR}$$

4.3 Puissance apparente

La puissance apparente est le produit UI. On peut la voir comme une grandeur complexe égale à :

$$\underline{S} = P + jQ \text{ dont le module est } S = \sqrt{(P^2 + Q^2)} \text{ (en VA)}$$

4.4 Théorème de Boucherot

Dans un réseau linéaire, parcouru par des courants sinusoïdaux de même fréquence :

- la puissance active totale est la somme arithmétique des puissances actives absorbées par chacun des éléments :
$$P_T = \sum P$$
- la puissance réactive totale est la somme algébrique des puissances réactives absorbées par chacun des éléments :
$$Q_T = \sum Q$$
- pour la puissance apparente, on ne peut écrire que $\underline{S_T} = \sum \underline{S}$ car $S_T \neq \sum S$

4.5 Facteur de puissance

On définit le facteur de puissance comme étant le rapport de la puissance active sur la puissance apparente :

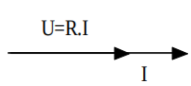
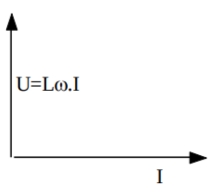
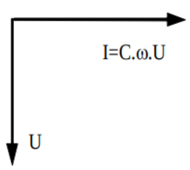
$$f_p = FP = \frac{P}{S}$$

On cherche en électrotechnique à faire en sorte qu'il soit le plus élevé possible (puissance réactive nulle) pour que le transport de l'énergie soit optimal.

5 Impédances et admittances

Ce sont des grandeurs complexes représentant le rapport $\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I}$ (impédance) ou $\underline{Y} = \underline{I}/\underline{U}$ (admittance)

5.1 Dipôles simples

	R	L	C
relation générale	u= R i	$u = L\frac{di}{dt}$	$i = C\frac{du}{dt}$
relation temporelle en alternatif sinusoïdal	i= î sin ωt u= R î sin ωt	i= î sin ωt u= Lω î cos ωt	u= û sin ωt i= Cω û cos ωt
diagramme de Fresnel			
relation complexe	$\underline{U}$ = R$\underline{I}$	$\underline{U}$ = jLω $\underline{I}$	$\underline{I}$ = jCω$\underline{U}$
impédance complexe	$\underline{Z}$ = R	$\underline{Z}$ = Ljω	$\underline{Z}$ = 1/Cjω
type de puissance	puissance active	Puissance réactive	puissance réactive
expression	P = RI² = U²/R	Q = Lω.I² = U²/Lω	Q= -U²Cω = -I²/Cω

Une impédance réactive (L ou C) s'appelle une réactance

Remarque

L'opération de dérivation dans le plan temporel correspond à une multiplication par $j\omega$ dans le plan complexe. En effet, la dérivée par rapport au temps d'un nombre complexe du type $\underline{z} = \rho e^{j\omega t}$ a pour expression : $\dfrac{d\underline{z}}{dt} = \dfrac{d(\rho e^{j\omega t})}{dt} = j\omega\rho e^{j\omega t} = j\omega\underline{z}$

5.2 Circuits

Les lois et les théorèmes relatifs aux réseaux linéaires s'appliquent en alternatif sinusoïdal comme en continu ; les relations deviennent des relations complexes.